Algebra II - 20 Febbraio 2015

Esercizio 1. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa. Provare o dare un controesempio:

1. Se A un anello commutativo con identità tale che ogni sottomodulo di un A-modulo libero è libero allora A è PID.
2. Sia $A_{\alpha,\beta}$ una matrice 6×6 a coefficienti in $\mathbb{R}$, con polinomio caratteristico $p_A(x) = (x-1)^\alpha (x-2)^\beta (x^2+1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Esistono valori di α e β per cui le possibili forme canoniche di Smith delle matrici caratteristiche $A_{\alpha,\beta} - xI$ sono esattamente 4.
3. Se A è un anello locale allora esistono un anello B e un primo $\mathfrak{p} \subset B$ tali che $A \cong B_{\mathfrak{p}}$.
4. Il polinomio $30x^5 + 60x^3 + 90x + 7$ è un'unità in $\mathbb{Z}/(540)[x]$.

Esercizio 2. Sia $I \subset A$ un ideale tale che A/I è un A-modulo piatto. Provare che $I/I^2 = (0)$.

Esercizio 3. Sia K un campo, $A = K[x]_{(x)}$ e M il campo delle frazioni di A

1. Provare che $M/(x)M$ è un A modulo finitamente generato.
2. Provare che M non è un A modulo finitamente generato.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2y + xz + yz, y^2z) \subset \mathbb{R}[x, y, z]$ e indichiamo con $A = \mathbb{R}[x, y, z]/I$.

1. Calcolare la base di Gröbner ridotta di I, rispetto all'ordinamento lessicografico $x > y > z$.
2. Trovare gli elementi nilpotenti di A.
3. Provare che $(x^2y^3, y^3z) \subset I \subset (x^2, z)$
4. Se $\mathfrak{p} = (x, z) \subset A$, trovare $A_{\mathfrak{p}}$.