Algebra II
Tracce delle soluzioni
9 Giugno 2014

Esercizio 1. Decidere se le seguenti affermazioni sono vere o false. Provare se vere, dare un controesempio se false.

i) Siano $I = (x^2+1, y^2-1)$ e $J = (x^2+xy, y^2+xy+1)$ ideali in $\mathbb{Q}[x, y]$ allora $\mathbb{Q}[x, y]/I \cong \mathbb{Q}[x, y]/J$.

ii) Sia $I \subset k[x, y]$ un ideale tale che $I \cap k[x] = 0$. I è primo se e solo se $I^e \subset k(x)[y]$ è primo e $I^{ec} = I$.

iii) Siano $f, g \in k[x, y]$ allora $\sqrt{(f, g)} = \sqrt{(f^2, g^3)}$

Soluzione. i) Falsa. $R_1 = \mathbb{Q}[x, y]/I$ e $R_2 = \mathbb{Q}[x, y]/J$ sono entrambi spazi vettoriali di dimensione finita. Infatti $J = (x, y^2 + 1)$ e R_1 e R_2 hanno basi rispettivamente $< 1, x, y, xy >$ e $< 1, y >$ quindi non possono essere isomorfi com anelli. Infatti se esistesse un isomorfismo $\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ consideriamo $v_1 = \varphi(1), v_2 = \varphi(x), v_3 = \varphi(y), v_4 = \varphi(xy) \in R_2$. Questi elementi sono linearmente dipendenti e quindi esistono a_1, a_2, a_3, a_4 non tutti nulli tali che $0 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = \phi(a_1+a_2x+a_3y), a_4xy$ da cui si dedurrebbe che $1, x, y, xy$ sono linearmente indipendenti. (Notare che da $\varphi(1) = 1$ segue che per ogni $a \in \mathbb{Q}$ si ha $\varphi(a) = a$).

ii) Vero. Se $I = I^{ec}$ e I^e è primo sempre vero che I è primo. Per il viceversa basta osservare che $k(x)[y] = S^{-1}k[x, y]$ con $S = k[x] \setminus 0$ e che esiste un corrispondenza biunivoca fra i primi I di $k[x, y]$ tali che $I \cap S = \emptyset$ e i primi di $k(x)[y]$ data da $I \longrightarrow I^e$.

iii) Vero. Basta provare che $\sqrt{(f,g)} \subset \sqrt{(f^2,g^3)}$ dato che l'altro contenimento è ovvio. Sia $h \in \sqrt{(f,g)}$ allora esiste n tale che $h^n = af + bg$ e quindi per $m = 4n$, $h^m = (af+bg)^4 \in (f^2, g^3)$.

Esercizio 2. Sia $S = \{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ e sia $A = S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$. Se $0 \neq p \in \mathbb{Z}$ un primo allora $A_{(p)A} \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ se e solo se $p \neq 2$.

Soluzione $A = \{\frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Se $p \neq 2$ allora $(p) \cap S = \emptyset$ e quindi $S^{-1}(p) = (p)A$ è un ideale primo di A. Dato che $2 \in A \setminus (p)A$ possiamo definire:

$$\begin{tikzcd} A \times \mathbb{Z}_{(p)} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"] & & A_{(p)A} \\ & A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

dove $f(\frac{a}{2^n}, \frac{c}{d}) = \frac{ac}{2^n d}$, $a, c, d \in \mathbb{Z}$, $d \notin (p)$ è bilineare e quindi esiste β data da $\beta(\frac{a}{2^n} \otimes \frac{c}{d}) = \frac{ac}{2^n d}$. Dato che $\frac{a}{2^n} \otimes \frac{c}{d} = \frac{1}{2^n} \otimes \frac{ac2^n}{d2^n} = 1 \otimes \frac{ac}{d2^n}$, β,(che è ovviamente surgettiva), è un isomorfismo.
Se invece $p = 2$ allora $(2) \cap S \neq \emptyset$ e quindi $A_{(2)A} = A \neq A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(2)} \cong \mathbb{Q}$.

Esercizio 3. Sia $N_a \subset \mathbb{Z}^3$ il sottomolulo di $\mathbb{Z}^3$ generato da $m_1 = (2,2,a), m_2 = (2,a,0), m_3 = (0,4,2)$ e sia $M_a = \mathbb{Z}^3/N$. Trovare le classi di isomorfismo di $M_a = \mathbb{Z}^3/N$, al variare di $a \in \mathbb{Z}$. Trovare, se esistono, i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(7), M_a) \neq 0$.

Soluzione. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & a & 4 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dato che $\Delta_1 = \gcd(2, a), \Delta_2 = \gcd(4, 2a, a^2)$ e $\Delta_3 = 4(2 - 3a)$ otteniamo 2 casi:
1) se $\gcd(a, 2) = 1$ la forma di Smith è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4(2-3a) \end{pmatrix}$$

Quindi $M_a \cong \mathbb{Z}/4(2-3a)$.
2) Se $a \equiv 0 \pmod 2$ la forma di Smith è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (2-3a) \end{pmatrix}$$

Quindi $M_a \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2-3a)$.
Allora affinché esista $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(7), M_a)$ non nullo si deve avere $2 - 3a \equiv 0 \pmod 7$.

Esercizio 4. Consideriamo l'anello $A = \mathbb{Z}[x, y]$ e l'ideale $I = (9x^2 - y, 7y^2 + 2x + y, 63) \subset A$.

i) Provare che ogni primo di A/I massimale

ii) Provare che A/I uno $\mathbb{Z}$-modulo finitamente generato

iii) Trovare una decomposizione primaria di I.

iv) Se B è un dominio a ideali principali ed esiste $\varphi : B \longrightarrow A/I$ iniettivo allora B un campo.

Soluzione. i) Dato che $63 = 3^2 7$, si ha $\sqrt{I} = \sqrt{(I, 9)} \cap \sqrt{(I, 7)} = (x, y, 3) \cap (x, y, 7) \cap (x + 1, y - 2, 7)$ che sono tutti massimali.
ii) Dato che $(9, 7) = 1$ si ha che $(I, 63) = (I, 9)(I, 7)$ e quindi $A/I \cong A/(I, 9) \oplus A/(I, 7)$.

Si ha $(I,9)=(x,y,9)$ e $(I,7)=(x,y,7)\cap(x+1,y-2,7)$ quindi $A/I\cong\mathbb{Z}/(9)\oplus(\mathbb{Z}/(7))^2$ e quindi è uno $\mathbb{Z}$ modulo finitamente generato.
iii) Come nel punto precedente possiamo decomporre I come $I=(x,y,9)\cap(x,y,7)\cap(x+1,y-2,7)$ dato che questi ideali hanno radicale massimale sono primari.
iv) Dato che A/I è finito se esiste $\varphi: B\longrightarrow A/I$ iniettivo B deve essere un dominio finito e quindi un campo.