Algebra II - 13 Luglio 2015

Esercizio 1. Sia A un dominio e siano $I, J \subset A$ ideali tali che $(I, J) = 1$. Provare che:

i) $I \oplus J \cong IJ \oplus A$

ii) Se IJ è principale allora I e J sono A-moduli proiettivi.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

i) Sia $I \subset A$ un ideale e $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo tale che $I \subset \mathfrak{p}$. Se $I_{\mathfrak{p}} \subset A_{\mathfrak{p}}$ è primario allora I è primario.

ii) Sia k un campo e sia$f(x, y) \in k[x, y]$ un polinomio di grado n. Se $C = V(f)$ è la curva piana definita da f e L è una retta non contentuta in C allora $\#(C \cap L) \leq n$.

iii) Sia A un PID, $Q(A)$ il campo delle frazioni di A.
Se $M \cong A^n \oplus (\oplus_i A/({p_i}^{n_i})$ è un A modulo finitamente generato, allora $\dim_{Q(A)}(Q(A) \otimes_A M) = n$.

Esercizio 3. Sia k un campo e $(A, \mathfrak{m})$ una k-algebra locale. Se $I \subset A$ è un ideale tale che $\dim_k(A/I) < \infty$ allora esiste n tale che $\mathfrak{m}^n \subset I$.

Esercizio 4. Indichiamo con M_a lo $\mathbb{Z}$-modulo generato da elementi v_1, v_2, v_3 che soddisfano le relazioni $2v_1 = v_2$, $v_1 = 3v_2$, $v_1 + v_2 = av_3$, con $a \in \mathbb{Z}$. Posto $a = 3$, costruire, se possibile, un omomorfismo non banale (di $\mathbb{Z}$ moduli) $g : \mathbb{Z}/(20) \longrightarrow M_3$. Descrivere al variare di $a \in \mathbb{Z}$, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(20), M_a)$.

Esercizio 5. Sia $I = (yz - y, xy + 2z^2, y - z) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$. Consideriamo il polinomio $f = x^3z - y^2$.

i) $f \in I$?

ii) Se $J = I\mathbb{Q}[x, y, z]_{(x,y,z)}$, $f \in J$?