Algebra II - 19 Gennaio 2016

Esercizio 1. Sia k un campo e $A = k[[x]]$ l'anello delle serie di potenze formali a coefficienti in k.

i) Provare che $a = \sum a_i x^i \in A$ è invertibile se e solo se $a_0 \neq 0$.

ii) Provare che A è un anello locale e determinare il suo ideale massimale.

Esercizio 2. i) Provare che $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x]/I \cong \mathbb{C}[x]/I\mathbb{C}[x]$ come $\mathbb{R}$-algebre.
ii) Provare che $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ come anelli.

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa. Provare o dare un controesempio:

1. Sia A un anello $I \subset A$ un ideale e sia $S = 1 + I$. $S^{-1}I$ è contenuto nel radicale di Jacobson $\mathfrak{J}(S^{-1}A)$
2. Per ogni $a \in k$ l'ideale $\mathfrak{q}_a = (y - ax, x^2) \subset k[x, y]$ è primario.
3. $(\mathbb{Z}/(375))_{(5)} \cong \mathbb{Z}/(75)$.

Esercizio 4. Determinare al variare di $a \in \mathbb{Z}$ le possibili forme di Smith delle matrici (a coefficienti in $\mathbb{Z}$)

$$M_a = \begin{pmatrix} 12 - a & 3 & a \\ 3 + a & -3 & -a \\ 9 - a & 6 & a \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia $I = (x^2 + 2y^2 - 2, x^2 + xy + y^2 - 2) \subset \mathbb{R}[x, y]$.

i) Provare che $V_{\mathbb{R}}(I)$ è finito.

ii) Provare che I è radicale.

iii) Vale $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x, y]/I = \#V_{\mathbb{R}}(I)$?