Algebra II - 13 Luglio 2015
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Sia A un dominio e siano $I, J \subset A$ ideali tali che $(I, J) = 1$. Provare che:

i) $I \oplus J \cong IJ \oplus A$

ii) Se IJ è principale allora I e J sono A-moduli proiettivi.

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow I \cap J \xrightarrow{f} I \oplus J \xrightarrow{g} I + J \longrightarrow 0$$

dove $f(a) = (a, -a)$ e $g(a, b) = a+b$. Dato che $(I, J) = 1$ si ha $I \cap J = IJ$ e quindi ottiene:

$$0 \longrightarrow IJ \xrightarrow{f} I \oplus J \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

da cui, dato che A è proiettivo (la successione spezza), si ricava $I \oplus J \cong IJ \oplus A$.
ii) Sia $IJ = (d)$. Se $d = 0$ allora $I \oplus J = A$ se $d \neq 0$ allora, dato che A è un dominio, $(d) \cong A$ e da (i) segue che $I \oplus J \cong A^2$. In entrambi i casi, dato che sia I che J sono addendi diretti di un modulo libero sono proiettivi.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

i) Sia $I \subset A$ un ideale e $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo tale che $I \subset \mathfrak{p}$. Se $I_{\mathfrak{p}} \subset A_{\mathfrak{p}}$ è primario allora I è primario.

ii) Sia k un campo e sia$f(x, y) \in k[x, y]$ un polinomio di grado n. Se $C = V(f)$ è la curva piana definita da f e L è una retta non contentuta in C allora $\#(C \cap L) \leq n$.

iii) Sia A un PID, $Q(A)$ il campo delle frazioni di A. Se $M \cong A^n \oplus (\oplus_i A/(p_i{}^{n_i})$ è un A modulo finitamente generato, allora $\dim_{Q(A)}(Q(A) \otimes_A M) = n$.

Soluzione i) Falso. Considerare l'deale (non primario) $I = (12) \subset Z$ e $\mathfrak{p} = (2)$. Si ha $I_{(2)} = (4)\mathbb{Z}_{(2)}$ che è primario.
ii) Vero. Sia $ax + by + c = 0$ l'equazione di L . $V(C \cap L) = V(f(x, -\frac{ax+c}{b}))$, se $b \neq 0$ oppure $V(C \cap L) = V(f(-\frac{c}{a}, y))$. Dato che la retta non è contenuta in C, $f(x, -\frac{ax+c}{b})$, (risp. $f(-\frac{c}{a}, y)$)) è un polinomio univariato non nullo di grado $\leq n$ e quindi ha al più n radici.
iii) Vero. Per ogni $a \in A$ si ha $Q(A) \otimes A/(a) = 0$, (dato che $\frac{b}{c} \otimes_A m = \frac{ab}{ac} \otimes_A m = \frac{b}{ac} \otimes_A am = 0$), da cui segue che $(Q(A) \otimes_A M) \cong Q(A) \otimes_A (A^n \oplus (\oplus_i A/(p_i{}^{n_i})) = Q(A) \otimes_A A^n \oplus (Q(A) \otimes_A (\oplus_i A/(p_i{}^{n_i})) = \oplus(Q(A) \otimes_A A) = (Q(A))^n$.

Esercizio 3. Sia k un campo e $(A, \mathfrak{m})$ una k-algebra locale. Se $I \subset A$ è un ideale tale che $\dim_k(A/I) < \infty$ allora esiste n tale che $\mathfrak{m}^n \subset I$.
Soluzione Dato che $\dim_k(A/I) < \infty$, A/I è un k spazio vettoriale di dimensione finita e quindi è sia noetheriano che artiniano. Inoltre è anche locale. Sia $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A/I$. $\overline{\mathfrak{m}}$ è finitamente generato (A/I noetheriano) ed esiste n tale che $\overline{\mathfrak{m}}^n = \overline{\mathfrak{m}}^{n+1}$ (A/I artiniano) quindi per Nakayama $\overline{\mathfrak{m}}^n = 0$ da cui segue che $\mathfrak{m}^n \subset I$.

Esercizio 4. Indichiamo con M_a lo $\mathbb{Z}$-modulo generato da elementi v_1, v_2, v_3 che soddisfano le relazioni $2v_1 = v_2$,

$v_1 = 3v_2, v_1 + v_2 = av_3$, con $a \in \mathbb{Z}$. Posto $a = 3$, costruire, se possibile, un omomorfismo non banale (di $\mathbb{Z}$ moduli) $g : \mathbb{Z}/(20) \longrightarrow M_3$. Descrivere al variare di $a \in \mathbb{Z}$, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(20), M_a)$.

Soluzione Si ha $M \cong coker(f)$, dove $f : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ ha matrice associata B_f. Calcoliamo la forma di Smith B_f.

$$\text{Smith}(B_f) = \text{Smith}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5a \end{pmatrix}.$$

da cui segue che $M \cong \mathbb{Z}/(5a)$. Se $a = 3$ basta definire $h : \mathbb{Z}/(20) \longrightarrow \mathbb{Z}(15)$, come $h(n) = 3n$.
Infine, se $a = 0$ si ha $M_0 \cong \mathbb{Z}$ e $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(20), \mathbb{Z}) = (0)$, se $a \neq 0$, $M_a \cong \mathbb{Z}/(5a)$ quindi dato che $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(20), M_a) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(20), \mathbb{Z}/(5a)) \cong \mathbb{Z}/(20, 5a)$ si ha:

- $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(20), M_a) \cong \mathbb{Z}/(5)$ se $(a, 4) = 1$,
- $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(20), M_a) \cong \mathbb{Z}/(10)$ se $a = 4k + 2$
- $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(20), M_a) \cong \mathbb{Z}/(20)$ se $a = 4k$.

Esercizio 5. Sia $I = (yz - y, xy + 2z^2, y - z) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$. Consideriamo il polinomio $f = x^3 z - y^2$.

i) $f \in I$?

ii) Se $J = I\mathbb{Q}[x, y, z]_{(x,y,z)}$, $f \in J$?

Soluzione i) La base di Gröbner ridotta di I, (lex con $x > y > z$), è $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ con $g_1 = z(x + 2), g_2 = y - z, g_3 = z^2 - z$. Riducendo f con G si ottiene $-9z \neq 0$ quindi $f \notin I$. (Oppure si può osservare che $(-2, 1, 1) \in V(I)$ ma $f(-2, 1, 1) = -9 \neq 0$).

ii) Dato che in $\mathbb{Q}[x, y, z]_{(x,y,z)}$, $(x + 2)$ e $(z - 1)$ sono invertibili $J = (y, z)$ e $f \in J$.