Algebra II - 19 Gennaio 2016
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Sia k un campo e $A = k[[x]]$ l'anello delle serie di potenze formali a coefficienti in k.

i) Provare che $a = \sum a_i x^i \in A$ é invertibile se e solo se $a_0 \neq 0$.

ii) Provare che A è un anello locale e determinare il suo ideale massimale.

Dimostrazione. i) Se a é invertibile allora necessariamente $a_0 \neq 0$. Viceversa, consideriamo ${a_0}^{-1}a = 1+b \in A$ con $b(0) = 0$, quindi $1 = (1 + b)(1 - b + b^2 - b^3 + ...)$ da cui segue che $1 + b$ è invertibile e quindi a é invertibile. Altra dimostrazione. Costruiamo un'inversa $b = \sum b_m x^m \in A$, per a se $a_0 \neq 0$. Si deve avere $ab = \sum c_j x^j = 1$, quindi $c_0 = a_0 b_0 = 1$ da cui $b_0 = {a_0}^{-1}$ e $c_j = \sum_{s=0}^{j} a_s b_{j-s} = 0$, per $j > 0$. Procediamo per induzione. Per $j = 1$ da $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ possiamo ricavare $b_1 = -{a_0}^{-1} a_1 b_0$. Supponiamo di aver trovato coefficienti per ogni $j \leq k$ e calcoliamo c_{k+1}. Si deve avere $c_{k+1} = a_0 b_{k+1} + \sum_{s=1}^{k+1} a_s b_{k+1-s} = 0$, di nuovo possiamo risolvere e calcolre b_{k+1} e in questo modo costruire un'inversa di a.

ii) Sia $\mathfrak{m} = \{b \in A \mid b(0) = 0\}$ l'insieme delle serie di potenze senza termine noto, $\mathfrak{m}$ è un ideale e ogni elemento che non appartiene a $\mathfrak{m}$ è invertibile, quindi è l'unico ideale massimale e A è locale.

Esercizio 2. i) Provare che $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x]/I \cong \mathbb{C}[x]/I\mathbb{C}[x]$ come $\mathbb{R}$-algebre.
ii) Provare che $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ come anelli.

Soluzione i) Possiamo intanto osservare che $I = (f) \subset \mathbb{R}[x]$ è un ideale principale. Considerando l'applicazione bilineare $\varphi : \mathbb{R}[x]/I \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}[x]/I\mathbb{C}[x]$ con $\varphi(g, \alpha) = \alpha g$ risulta ben definito un omomorfismo di $\mathbb{R}$-moduli

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}[x]/I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}[x]/I\mathbb{C}$$

tale che $\tilde{\varphi}(g \otimes \alpha) = \alpha g$. Dato che se $g = \sum a_j x^j$ si ha $g \otimes \alpha = \sum (x^j \otimes a_j \alpha)$. Definiamo $\psi : \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]/I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ come $\psi(\sum_i \beta_i x^i) = \sum (x^i \otimes \beta_i)$ se $g = \gamma(x) f \in I\mathbb{C}[x]$ allora $\psi(\gamma(x)f) = \psi(\sum \gamma_i x^i f) = \psi(\sum x^i f \otimes \gamma_i) = 0$ quindi ψ passa al quoziente ed è l'inversa di $\tilde{\varphi}$ che quindi risulta un isomomorfismo di $\mathbb{R}$ moduli, che è anche isomorfismo di $\mathbb{R}[x]$-moduli.
Definendo $(h \otimes \alpha)(g \otimes \beta) = hg \otimes \alpha\beta$, dato che $\tilde{\varphi}((h \otimes \alpha)(g \otimes \beta)) = \tilde{\varphi}(hg \otimes \alpha\beta) = (\alpha h)(\beta g) = \tilde{\varphi}(h \otimes \alpha)\tilde{\varphi}(g \otimes \beta)$ e $\tilde{\varphi}(1 \otimes 1) = 1$, si ha la tesi.
ii)) Si ha che $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ quindi dal punto precedente otteniamo:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$$

Per il teorema cinese del resto:

$$\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}[x]/(x + i) \times \mathbb{C}[x]/(x - i) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa. Provare o dare un controesempio:

1. Sia A un anello $I \subset A$ un ideale e sia $S = 1 + I$. $S^{-1}I$ è contenuto nel radicale di Jacobson $\mathfrak{J}(S^{-1}A)$
2. Sia k un campo. Per ogni $a \in k$ l'ideale $\mathfrak{q}_a = (y - ax, x^2) \subset k[x, y]$ è primario.

3. $(\mathbb{Z}/(375))_{(5)} \cong \mathbb{Z}/(75)$?

Soluzione 1. Vero. Proviamo che per ogni elemento $\alpha \in S^{-1}I$ vale che per ogni $\beta \in S^{-1}A$, $1-\beta\alpha$ è invertibile. $1-\beta\alpha = 1 - \frac{b}{1+i}\frac{j}{1+k}$ con $i, j, k \in I$. Se indichiamo con h l'elemento di I tale che $(1+i)(1+k) = 1+h$, $1-\beta\alpha = \frac{1+(h-bj)}{1+h}$ e quindi è invertibile.
2. Vero. Per ogni a si ha $\sqrt{\mathfrak{q}_a} \supset (\mathfrak{q}_a, x) = (x, y)$, dato che (x, y) è massimale $\mathfrak{q}_a$ è primario.
3. Falso. Dato che $375 = 3.5^3$ e $(3, 5) = 1$ l'omomorfismo surgettivo $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow (\mathbb{Z}/(375))_{(5)}$ ha nucleo $\mathrm{Ker}(\varphi) = (125)$. Infatti se $\varphi(m) = 0$ in $(\mathbb{Z}/(375))_{(5)}$, allora esiste $a \not\equiv 0 \pmod 5$ tale che $am = 0$ in $\mathbb{Z}/(375)$. Da cui $a \equiv 0 \pmod 3$ e quindi $m \equiv 0 \pmod{175}$.

Esercizio 4. Determinare al variare di $a \in \mathbb{Z}$ le possibili forme di Smith delle matrici (a coefficienti in $\mathbb{Z}$)

$$M_a = \begin{pmatrix} 12-a & 3 & a \\ 3+a & -3 & -a \\ 9-a & 6 & a \end{pmatrix}$$

Soluzione Effettuando alcune operazioni elementari la matrice può essere ridotta nella forma

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Otteniamo cosí $\Delta_1 = (15, a, 3)$, $\Delta_2 = (45, 15a, 3a)$ e $\Delta_3 = (45a)$.
Distinguiamo i casi $(a, 15) = 1$ e $(a, 15) \neq 1$.
Se $(a, 15) = 1$ si ha $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = (3)$ e $\Delta_3 = (45a)$ da

cui la forma di Smith

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15a \end{pmatrix}$$

Se $(a, 15) \neq 1$ si hanno 3 casi:
Se $(a, 15) = 3$, $\Delta_1 = (3)$, $\Delta_2 = (9)$ e $\Delta_3 = (45a)$ da cui la forma di Smith

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5a \end{pmatrix}$$

Se $(a, 15) = 5$, $\Delta_1 = (1)$, $\Delta_2 = (15)$ e $\Delta_3 = (45a)$ da cui la forma di Smith

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}$$

Se $(a, 15) = 15$, $\Delta_1 = (3)$, $\Delta_2 = (45)$ e $\Delta_3 = (45a)$ da cui la forma di Smith

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia $I = (x^2 + 2y^2 - 2, x^2 + xy + y^2 - 2) \subset \mathbb{R}[x, y]$.

i) Provare che $V_{\mathbb{R}}(I)$ è finito.

ii) Provare che I è radicale.

iii) Vale $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x, y]/I = \#V_{\mathbb{R}}(I)$?

Soluzione i) $V_{\mathbb{R}}(I) \neq \emptyset$, infatti la base di Gröbner ridotta (lex con $x > y$) è

$$G = (x^2 + 2y^2 - 2, xy - y^2, y(y^2 - \frac{2}{3})).$$

ii) Ricordiamo che vale $(J, fg) = (J, f) \cap (J, g)$ quando $(f, g, J) = (1)$. Dato che il polinomio $y(y^2 - \frac{2}{3})$ si fattorizza (su $\mathbb{R}$) come prodotto di fattori a due a due coprimi, otteniamo che

$$I = (I, y) \cap (I, y - \sqrt{\frac{2}{3}}) \cap (I, y + \sqrt{\frac{2}{3}})$$

Ripetendo il ragionamento con gli ideali ottenuti si ha

$$I = (x - \sqrt{2}, y) \cap (x + \sqrt{2}, y) \cap$$

$$(x - \sqrt{\frac{2}{3}}, y - \sqrt{\frac{2}{3}}) \cap (x + \sqrt{\frac{2}{3}}, y + \sqrt{\frac{2}{3}})$$

Gli ideali della decomposizione sono massimali e quindi I è radicale.
iii) Dal punto precedente $\#V_{\mathbb{R}}(I) = 4$. Dato che $\{1, x, y, y^2\}$ sono una base per $\mathbb{R}[x, y]/I$, l'affermazione è vera.