Algebra II - 8 Giugno 2015
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. i) Sia M un A-modulo finitamente generato e $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo, allora $M_\mathfrak{p} = 0$ se e solo se $\mathrm{Ann}(M) \not\subset \mathfrak{p}$.
ii) Sia A un anello e $0 \neq I \subset A$ un ideale finitamente generato. Se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$ si ha $I_\mathfrak{m} = 0$ oppure $I_\mathfrak{m} = A_\mathfrak{m}$ allora I è principale ed è generato da un elemento idempotente.

Soluzione. i) Sia $M =< m_1, .., m_k >$. Se $M_\mathfrak{p} = 0$, per ogni m_i esiste $s_i \notin \mathfrak{p}$ tale che $s_i m_i = 0$, allora $s = s_1..s_k \notin \mathfrak{p}$ e $s \in \mathrm{Ann}(M)$. Viceversa se $\mathrm{Ann}(M) \not\subset \mathfrak{p}$ esiste $s \in S \cap \mathrm{Ann}(M)$ e quindi per ogni $\frac{m}{1} = \frac{sm}{s} = 0$.
ii)Sia $\mathfrak{m} \subset A$ massimale. Se $I_\mathfrak{m} = 0$ allora, per il punto precedente, $\mathrm{Ann}(I) \not\subset \mathfrak{m}$. Se invece $I_\mathfrak{m} = A$ si ha $I \not\subset \mathfrak{m}$. Quindi per ogni $\mathfrak{m}$ si ha $I + \mathrm{Ann}(I) \not\subset \mathfrak{m}$. Da questo segue che $I + \mathrm{Ann}(I) = A$ e che esistono $i \in I$ e $j \in \mathrm{Ann}(I)$ tali che $i + j = 1$. Allora $i = i(i + j) = i^2$ e $i \neq 0$ altrimenti $j = 1$ e I sarebbe 0, inoltre per ogni $b \in I$ $b = b(i+j) = bi$ quindi $I = (i)$.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

i) Se A è un anello e $I \subset A$ un ideale allora $A^n/IA^n \cong \prod_{i=1}^n A/IA$

ii) Se $p(x) \in K[x]$, con K campo qualunque, è un polinomio irriducibile l'ideale $(p(x), p(y))$ è primo in $K[x, y]$.

iii) Se M è un A-modulo proiettivo e $N \subset M$ un sottomodulo., allora N è proiettivo

i) VERO. Basta considerare l'omomorfismo surgettivo $\varphi : A^n \longrightarrow (A/I)^n$ dato da $\varphi(a_1, .., a_n) = (a_1+I, .., a_n+I)$ per cui $\mathrm{Ker}(\varphi) = IA^n$.

ii) FALSO. Sia $K = \mathbb{Q}$ e sia $p(x) = x^2 + 1$. $p(x)$ è irriducibile, ma l'ideale $(x^2 + 1, y^2 + 1) = (x^2 - y^2, y^2 + 1) = (x - y, y^2 + 1) \cap (x + y, y^2 + 1)$ è intersezione di primi distinti, che lo contengono propriamente.

iii) FALSO. Sia $A = \mathbb{Z}/(4)$ e siano $M = A$ e $N = (2)A \cong \mathbb{Z}/(2)$. M è libero, quindi proiettivo, ma N non può essere proiettivo perché in caso contrario le successione

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/(2) \xrightarrow{*2} \mathbb{Z}/(4) \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

spezzerebbe mentre $\mathbb{Z}/(4) \ncong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$.

Esercizio 3. Se M uno $\mathbb{Z}$-modulo tale che la successione:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^4 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $f(x, y, z) = (x + y + z, -3x + y + z, x - 3y - 3z, x + 3y + z)$ è esatta. Esprimere M come somma diretta di $\mathbb{Z}$-moduli ciclici.
Soluzione

$M \cong \mathrm{coKer} f$, cerchiamo quindi la forma di Smith della matrice che rappresenta f

$$\mathrm{Smith}(B_f) = \mathrm{Smith}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

da cui deduciamo che $M \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(4)$

Esercizio 4. Un A-modulo M si dice semplice se $M \neq 0$ e se non ha sottomoduli propri non banali. Provare che:

i) Un A-modulo è semplice se e solo se è isomorfo ad $A/\mathfrak{m}$ con $\mathfrak{m}$ ideale massimale.

ii) Se M, N sono A moduli semplici e $\varphi : M \longrightarrow N$ un omomorfismo di A moduli, allora φ è l'omomorfismo nullo o un isomorfismo.

iii) Se M è semplice e $\mathfrak{J}(A)$ è il radicale di Jacobson di A allora $\mathfrak{J}(A)M = 0$.

iv) Se A è noetheriano e $\mathrm{Ann}(M) \neq 0$ è un ideale di dimensione zero, allora M contiene un sottomodulo semplice.

Soluzione.) i) Se $M \cong A/\mathfrak{m}$ allora M è semplice. Viceversa, sia $0 \neq m \in M$ e sia $f : A \longrightarrow M$ l'omomorfismo dato da $f(a) = am$. Allora $f(A) \subset M$ è un sottomodulo di M diverso da 0 e quindi, dato che M è semplice si ha $f(A) = M$ cosí f è un omomorfismo surgettivo e $M \cong A/\mathrm{Ker}(f)$, (come A moduli). Infine, dato che a ogni ideale che contiene $\mathrm{Ker}(f)$, corrisponderebbe un sottomodulo di M, $\mathrm{Ker}(f)$ deve essere massimale.
ii) Si ha $\mathrm{Ker}\varphi \subset M$ e $\varphi(M) \subset N$. Dato che M è semplice, si ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = M$ e in tal caso φ è l'omomorfismo nullo, oppure $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ ossia φ è iniettivo. In questo caso $\mathrm{Im}(\varphi) \neq 0$ e quindi si deve avere $\mathrm{Im}(\varphi) = N$.
iii) Dai punti precedenti segue che per ogni modulo semplice esiste un ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$ tale che $M \cong A/\mathfrak{m}$ quindi $\mathfrak{J}(A) \subset \mathfrak{m} = \mathrm{Ann}(M)$.
iv) Sia $I = \cap \mathfrak{q}_i$ una decomposizione primaria minimale di I. Dato che I è zero dimensionale $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{m}_i$ sono ideali massimali e per ogni i esiste s_i, minimo, tale che tale che $\mathfrak{m}^{s_i} \subset \mathfrak{q}_i$. Sia $J = {\mathfrak{m}_1}^{s_1 - 1} \cap_{i>1} {\mathfrak{m}_i}^{s_i} \not\subset \mathrm{Ann}(M)$, allora $0 \neq M_1 = JM \subset M$, è tale che $\mathrm{Ann}(M1) = \mathfrak{m}_1$, da questo segue che se $0 \neq m \in M_1$ il sottomodulo $N =< m >\subset M$ è semplice.

Esercizio 5. Sia $I = (y^2 - xz, x^2 - y^2, x^2 - yz) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$. Indichiamo con $A = \mathbb{Q}[x, y, z]/I$.

i) Calcolare la base di Gröbner ridotta con lex $x > y > z$.

ii) Trovare le componenti irriducibili di $\mathbf{V}(I)$

iii) Calcolare $S^{-1}A$ con $S = A \setminus (x, y)A$

Soluzione. i) La base di Gröbner è $(x^2 - yz, xz - yz, y^2 - yz)$.
ii) Si ha che $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(\sqrt{I})$.

$$\sqrt{I} = \sqrt{(x^2 - yz, xz - yz, y)} \cap \sqrt{(x^2 - yz, xz - yz, y - z)} =$$
$$= (x, y) \cap (x - z, y - z) = I_1 \cap I_2.$$

Dato che $A/(x, y)A \cong A/(x - z, y - z)A \cong \mathbb{Q}[z]$, questi ideali sono primi (distinti) e quindi $\mathbf{V}(I)$ non è irriducibile e $\mathbf{V}(I_1)$ e $\mathbf{V}(I_2)$ sono le componenti irriducibili.
iii) Sia $J = (x, y)A$. Innanzitutto z e $y - z \notin J$ quindi sono invertibili, cosí otteniamo $\frac{x}{1} = \frac{y}{1}$ e $\frac{y}{1} = 0$. Quindi $S^{-1}A \cong \mathbb{Q}(z)$.