Algebra II – II Verifica, 26 Maggio 2010- Traccia delle soluzioni

Esercizio 1. Siano A e B anelli commutativi con identita'. Indichiamo con $R = A \times B$ e con $S = \{1\} \times B$. Provare che $S^{-1}R \cong A$.

Soluzione Consideriamo l'omomorfismo $f : A \times B \longrightarrow A$ dato da $f(a, b) = a$. Per ogni $s \in S$, $f(s)$ è invertibile, inoltre, poiche' $(1, 0) \in S$, si ha che se $f(a, b) = 0$ ossia se $a = 0$ allora $(1, 0)(a, b) = 0$. Da questo segue che f si estende, in modo unico, a $\bar{f} : S^{-1}R \longrightarrow A$, dato da $\bar{f}(\frac{(a,b)}{(1,0)}) = f(a, b) = a$, che è un isomorfismo.

Esercizio 2. Siano A e B anelli commutativi con identita' e sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo. Provare che

i) $\varphi(\mathbf{N}(A)) \subseteq \mathbf{N}(B)$.

ii) Se φ e' surgettivo allora $\varphi(\mathbf{J}(A)) \subseteq \mathbf{J}(B)$.

iii) Dare un controesempio di ii) se φ non e' surgettivo .

($\mathbf{N}$ e $\mathbf{J}$ indicano rispettivamente il nilradicale e il radicale di Jacobson).

Soluzione.i) Innanzitutto osserviamo che dato che φ è surgettivo $\varphi(I) = (\varphi(I))$. Sia $a \in \mathbf{N}(A))$, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n = 0$ allora $(\varphi(a))^n = \varphi(a^n) = 0$ e quindi $\varphi(a) \in \mathbf{N}(B)$ e $\varphi(\mathbf{N}(A)) \subseteq \mathbf{N}(B)$.

ii) Sia $a \in \mathbf{J}(A)$ alora per ogni $x \in A$ $1 - xa$ è invertibile, quindi anche $\varphi(1-xa) = 1 - \varphi(x)\varphi(a)$ è invertibile in B, dato che φ è surgettiva questo implica che $\varphi(a) \in \mathbf{J}(B)$.
iii) Sia $A = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, (b,2) = 1\} \subset \mathbb{Q}$. $\mathbf{J(A) = (2)}$ e $\mathbf{J}(\mathbb{Q}) = (\mathbf{0})$.

Esercizio 3.

i) Siano $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ polinomi monici e sia $R(f,g)$ il risultante di f, g.

   Provare che se $R(f,g) = p$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo allora $(f,g) \cap \mathbb{Z} = (p)$.

ii) Sia $I = (x^2 - 4x + 1, x^2 - x) \subset \mathbb{Z}[x]$.

   a. Trovare $I^c = I \cap \mathbb{Z}$

   b. Descrivere $\mathbb{Z}[x]/I$.

Soluzione. i) Sicuramente $p = R(f,g) = Af + Bg \in (f,g)$, dato che (p) massimale basterà allora provare che $(f,g) \subsetneq (1)$. Supponiamo che esistano $a, b \in \mathbb{Z}[x]$ tali che $af + bg = 1$, $\deg a < \deg g$ e $\deg b < degf$ e questa relazione si riduce modulo p e si ha $\bar{a}\bar{f} + \bar{b}\bar{g} = 1 \pmod{p}$ e questo contraddice il fatto che essendo f e g monici si ha $\overline{R(f,g)} = R(\bar{f}, \bar{g}) = 0 \pmod{p}$.

ii) a) $R(f,g) = \det \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Quindi $I^c = (2)$.

b) $I = (I, 2) = (x+1, 2)$ quindi $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}/(2)$.

Esercizio 4. Siano M, N, P $\mathbb{Z}$- moduli.
Provare che se esistono $p, q \in \mathbb{Z}$ primi distinti tali che valga $pN = 0$ e $qP = 0$ allora la successione $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ spezza.

Soluzione Possiamo provare che esiste una retrazione di f ossia un omomorfismo $\alpha : M \longrightarrow N$ tale che $\alpha \circ f = id_N$. Dato che p, q sono relativamente primi esistono $p' = ap, q' = bq \in \mathbb{Z}$, $p' + q' = 1$. Osserviamo che per ogni $m \in M$, $m = p'm + q'm$ e quindi $g(m - p'm) = q'g(m) = 0$ e quindi $m - p'm \in Im(f)$ ed esiste un unico $n \in N$ tale che $f(n) = m - p'm = q'm$. Definiamo $\alpha(m) = q'n$. Allora $\alpha(f(n)) = q'n = (1 - p')n = n - p'n = n$.