Algebra II - I Verifica intermedia
20 Aprile 2011

Esercizio 1: Sia $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \\ a & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

con a numero intero. Determinare la classe di isomorfismo di $\mathrm{coker}(\phi)$ in funzione di a.

Esercizio 2: Siano $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi, $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali e sia $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(36) \times \mathbb{Q}$.

(i) Trovare il nilradicale di A,

(ii) Determinare gli idempotenti di A.

(iii) Determinare gli ideali di A. Sono tutti principali?

(iv) Determinare gli ideali primi di A e tra questi gli ideali massimali.

Esercizio 3: Sia M un A-modulo finitamente generato e sia $0 \neq N \subset M$ un sottomodulo:

i) provare che $M \ncong M/N$

ii) Trovare un controesempio se M non e' finitamente generato.

Esercizio 4: Sia $I \subset \mathbb{C}[x, y]$. Provare che:

i) se $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ sono tali che $(f, g, I) = 1$ allora $(I, f) \cap (I, g) = (I, fg)$

ii) se esistono $f_1 \in I \cap \mathbb{C}[x]$ e $f_2 \in I \cap \mathbb{C}[y]$ liberi da quadrati, allora $I = \sqrt{I}$.

iii) Dato $I = (x^2y - y, xy^2 - x) \subset \mathbb{C}[x, y]$, calcolare $\sqrt{I}$.

Esercizio 5: Sia $I = (x^2 + xy + y^2, xy^2 + 1) \subset \mathbb{Z}/(2)[x, y]$ e siano $f_1 = x^3 + y^5 + xy^2$, $f_2 = y(x^2 + x + y)$. E' vero che $f_1 \equiv f_2 \pmod{I}$?