

Algebra II - I Verifica intermedia
20 Aprile 2012

Esercizio 1: Sia $M = \mathbb{Z}^3/N$, con N sottomodulo generato da $m_1 = (0, a, b)$, $m_2 = (3, 3, 0)$ e $m_3 = (3, -1, 0)$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Trovare per quali valori di $a, b \in \mathbb{Z}$, $\#M$ e' finita e per quali valori M e' ciclico.

Esercizio 2: Sia A un anello commutativo con identita'. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Provare o dare un controesempio.

- (i) $I \subset A$ ideale proprio e' massimale se e solo se per ogni ideale $J \subseteq A$ si ha $J \subseteq I$ o $I + J = A$.
- (ii) Se $P \subseteq A$ e' un ideale primo (proprio) tale che A/P e' finito allora P e' massimale.

Esercizio 3: Sia M uno \mathbb{Z} -modulo ciclico e siano N e P sottomoduli di M . Provare che se esistono $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$ tali che $Ann(N) = (p)$ e $Ann(P) = (q)$ e $Ann(M) = (pq)$ allora $M = N \oplus P$.

Esercizio 4: Sia $I = (y^2 - xz, x^2 - y^2, x^2 - yz) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$

- i) $V(I)$ e' finito?
- ii) trovare le componenti irriducibili di $V(I)$.
- iii) Se $f = y(x^2 + x + y)$ e' vero che $f \in \sqrt{I}$?