Algebra II - I verifica Intermedia
Traccia delle soluzioni
23 aprile 2013

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo con identita'.

i) Se $I, J \subset A$ ideali e $I \subset \mathfrak{J}(A)$ e $(I, J) = 1$ allora $J = (1)$. ($\mathfrak{J}(A)$ e' il radicale di Jacobson di A).

ii) Provare che l'insieme degli ideali primi di A contiene elementi minimali rispetto all'inclusione.

iii) Se A e' ridotto (i.e. $\mathfrak{N}(A) = (0)$) e $a \in A$ e' un divisore di zero, allora a appartiene a uno dei primi minimali di A. ($\mathfrak{N}(A)$ e' il nilradicale di A).

Soluzione (i) Siano $a \in I$, $b \in J$ tali che $a + b = 1$. Dato che $I \subset \mathfrak{J}(A)$ si ha che $b = 1 - a \in J$ e' invertibile, da cui la tesi.

(ii) Sia Σ l'insieme degli ideali primi di A, semiordinato con $\supset$. Σ e' non vuoto perche' $A \neq 0$ e quindi esiste sempre un ideale massimale. Sia $P_0 \supset P_1 \supset \ldots$ una catena discendente di ideali primi. Se proviamo che $\cap P_i = P$ e' un ideale primo per Zorn esistono elemento minimali. Siano $x, y \in A$ e $xy \in P$. Quindi $xy \in P_i, \forall i$. Se $x, y \notin P$, esistono n, m tali che $x \notin P_n$ e $y \notin P_m$, se allora $m \leq n$ (ossia $P_m \supset P_n$) $xy \notin P_n$, contro le ipotesi.

(iii) Sia $b \in A$, $b \neq 0$, tale che $ab = 0$. Dato che $\mathfrak{N}(A) = 0$ esiste un primo minimale $\mathfrak{p}$ tale che $b \notin \mathfrak{p}$, ma allora da $ab = 0 \in \mathfrak{p}$ segue che $a \in \mathfrak{p}$.

Esercizio 2. Sia M lo $\mathbb{Z}$-modulo definito da $M = \mathbb{Z}^3/N$, con N sottomodulo generato da $m_1 = (2, 4, -4)$, $m_2 = (4, 12, -12)$ e $m_3 = (2, -4, -4)$. Trovare l'annullatore di M.

Soluzione La forma di Smith della matrice A le cui righe sono i vettori m_1, m_2, m_3, e' $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Quindi $M \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(8)$ e quindi $Ann(M) = (8) \subset \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Considerare il diagramma di A-moduli e A-omomorfismi:

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow[g]{} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove la riga e' esatta. Supponiamo che F sia un A-modulo libero. Provare che esiste un omomorfismo $h : F \to M$ tale che $gh = f$.

Soluzione Sia $\mathfrak{B} = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una base di F. Per ogni x_α, dato che g e' surgettiva, esiste $m_\alpha \in M$ tale che $g(m_\alpha) = f(x_\alpha)$. Definiamo allora $h(x_\alpha) = m_\alpha$ e per ogni $x = \sum_\alpha c_\alpha x_\alpha \in F$ ($c_\alpha \neq 0$ per un numero finito di α) $h(x) = \sum_\alpha c_\alpha m_\alpha$.

h e' ben definita perche $\mathfrak{B}$ e' una base di F ed e' un omomorfismo. Infatti se $x = \sum c_\alpha x_\alpha$ e $y = \sum b_\alpha x_\alpha$, $a, b \in A$, si ha $h(ax + by) = h(\sum(ac_\alpha + bb_\alpha)x_\alpha) = \sum(ac_\alpha + bb_\alpha)m_\alpha = a\sum c_\alpha m_\alpha + b\sum b_\alpha m_\alpha = ah(x) + bh(y)$. Infine, per definizione, $gh = f$.

Esercizio 4. Dato il sistema:

$$\Sigma = \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^3 - 8x + 3y = 0 \\ x^2y - 3x + y = 0 \end{cases}$$

i) Provare che Σ ha un numero finito di soluzioni in $\mathbb{C}^2$.

ii) Trovare tutte le soluzioni $\beta \in \mathbb{Q}^2$ di Σ

ii) Se $V_{\mathbb{R}}(I) = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \text{ e' soluzione di } \Sigma\}$, decomporre $V_{\mathbb{R}}(I)$ come unione di varieta' irriducibili.

Soluzione (i) Sia $I = (x^2-3xy+y^2, x^3-8x+3y, x^2y-3x+y) = (f_1, f_2, f_3)$. Rispetto all'ordinamento tot-lex con $y > x$ si ha che $x^3, y^2 \in Lt(I)$ quindi Σ ha un numero finito di soluzioni.

(ii). Per calcolare le soluzioni usiamo l'ordinamento di eliminazione lex con $x > y$. Si ha $S(f_1, f_2) = xy^2 - x \in I$. Dato che $V(A, BC) = V(A, B) \cup V(A, C)$ per ideali A, B, C si ottiene che $V(I) = V(I, x) \cup V(I, y^2 - 1) = V(x, y) \cup V(x^2 - 3x + 1, y - 1) \cup V(x^2 + 3x + 1, y + 1)$, quindi l'unica soluzione razionale e' $(0, 0)$.

(iii) Raffinando la decomposizione ottenuta si ha

$V(I) = V(x,y) \cup (x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, y-1) \cup (x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, y-1) \cup$ $(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}, y+1) \cup (x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y+1)$. Dato gli ideali sono tutti massimali le componenti della decomposizione di $V(I)$ sono irriducibili.