Algebra II - II Verifica intermedia
30 Maggio 2013

Esercizio 1: Sia $I \subset A$ un ideale, se $\cap_{n \geq 1} I^n = (0)$ allora per ogni $a \in I$, $1 + a$ non e' un divisore di zero in A.

Soluzione Se $b(1 + a) = 0$ allora $b = -ba$, quindi (moltiplicando per $-a$ ambo i membri) $b = -ba = ba^2 \in I^2$. Pertanto, induttivamente, si ha che $b \in I^n$ per ogni $n \geq 1$ quindi, $b = 0$.

Esercizio 2: Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

Dimostrare se vere o dare un controesempio se false.

i) $M = \mathbb{Z}/(12) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(30)$ allora $Supp(M) = \{p \in Spec(\mathbb{Z}) \mid M_p \neq (0)\} = \{(2), (3)\}$.

ii) Se $A = K[x, y]/(xy)$ e $D(A)$ e' l'insieme dei divisori di zero di A, allora $a \notin D(A)$ se e solo se $a \in K$.

iii) Sia K un campo algebricamente chiuso e siano $f, g \in K[x_1, .., x_n]$. Se f e' un polinomio irriducibile e $V(f) \subset V(g)$ allora f divide g.

Soluzione i) Vera. Dato che M e' finitamente generato si ha che $\mathbf{p} \in Supp(M)$ se e solo se $Ann(M) \subseteq \mathbf{p}$. Inoltre $M = \mathbb{Z}/(12) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(30) \cong \mathbb{Z}/(6)$ quindi $Ann(\mathbb{Z}/(6)) = 6\mathbb{Z}$ e si ha $Supp(M) = \{(2), (3)\}$.

ii) Falsa. A e' noetheriano quindi $D(A)$ e' uguale all' unione dei primi associati a (0) quindi $D(A) = (\bar{x}) \cup (\bar{y})$ e l'elemento $a = \overline{x} + \overline{y} \in A$ non appartiene a $D(A)$ e nemmeno a K.

iii) Vero. K e' algebricamente chiuso e (f) e' primo, dato che f e' irriducibile, quindi $I(V(g)) = \sqrt{(g)} \subseteq I(V(f)) = (f)$, da cui la tesi.

Esercizio 3: Siano

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{g} T \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow 0$$

due successioni esatte di A moduli, provare che

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{gf} T \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow 0$$

e' esatta.

Soluzione La successione e' sicuramente esatta in M e W, basta quindi provare l'esattezza in N e in T ossia che $ker(gf) = Im(\varphi)$ e $Im(gf) = Ker(\psi)$. Dato che g e' iniettiva $Ker(gf) = Ker(f) = Im(\varphi)$ e dalla surgettivita' di f segue che $Im(gf) = Im(g) = Ker(\psi)$.

Esercizio 4: Sia K un campo e sia $B \subset K$ un anello che non e' un campo. Provare che K non puo' essere un B-modulo finitamente generato. (Suggerimento: Provare prima nel caso in cui B e' un anello locale)

Soluzione Se B e' locale e $\mathbf{m}$ e' l'deale massimale, dato che $\mathbf{m}K = K$ (ogni elemento non zero di B e' invertibile in K) se K fosse un B-modulo finitamente generato si avrebbe, per Nakayama, che $K = 0$.

Se B non e' locale, basta considerare un ideale massimale $\mathbf{m}$ e localizzare in $\mathbf{m}$: si ottiene che se K fosse finitamente generato come B modulo allora $K_{\mathbf{m}} = K$ sarebbe finitamente generato come $B_{\mathbf{m}}$-modulo e quindi per la prima parte si dovrebbe avere $K = 0$.

Esercizio 5: Sia K un campo di caratteristica 0 e sia $I = (x^2 + y^2, x^3y^3 + y^4) \subset K[x, y]$ e sia $f = x^2 + 5x$.

$f \in \sqrt{I}$? $f \in \sqrt{I_{(x,y)}}$?

Soluzione Usando piu' volte la relazione

$$\sqrt{(J, hg)} = \sqrt{(J, g)}, \cap \sqrt{(J, h)}$$

si ottiene

$\sqrt{I} = \sqrt{(I, y^3)} \cap \sqrt{(I, x^3 + y)} =$
$(x, y) \cap \sqrt{(x^6 + x^2, x^3 + y)} =$
$(x, y) \cap \sqrt{(x^4 + 1, x^3 + y)}$.

L'ideale (x^4+1, x^3+y) e' radicale. Infatti $K[x, y]/(x^4 + 1, x^3 + y) \cong K[x]/(x^4 + 1)$ non ha ilpotenti diversi da zero dato che $x^4 = 1$ e' libero da quadrati. Cosi $\sqrt{I} = (x, y) \cap (x^4+1, x^3+y)$. Quindi $f \notin \sqrt{I}$ perche' non appartiene a (x^4+1, x^3+y) (i polinomi sono base di Gröbner con $y > x$ e f e' ridotto e diverso da zero).

Invece $f \in \sqrt{I_{(x,y)}}$: infatti $\sqrt{(I_{(x,y)}} = (\sqrt{I})_{(x,y)} = (x, y)_{(x,y)}$.