Algebra II
10 Aprile 2014

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo con identità e siano $I, J \subset A$ ideali. Per ognuna delle seguenti affermazioni, dimostrare, se vera, o trovare un controesempio, se falsa:

i) $I + J = A$ se e solo se $I^n + J^n = A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\sqrt{(I : J)} \subset (\sqrt{I} : J)$

iii) $\sqrt{(I : J)} = (\sqrt{I} : J)$

iv) $(I : J) = (I : \sqrt{J})$

Esercizio 2. Sia $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & 6 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \\ a & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{Z}$. Trovare, se esistono, i valori di a per cui:

i) $\operatorname{coker}(\phi)$ è finito.

ii) $\operatorname{coker}(\phi)$ non è ciclico.

Esercizio 3. Sia A un dominio di integrità e siano $I, J \subset A$ ideali, tali che $I + J = A$. Sia $\varphi : I \oplus J \longrightarrow A$ l'omomorfismo di A moduli dato da $\varphi(i, j) = i + j$. Provare che:

i) φ è surgettivo.

ii) $I \oplus J \cong IJ \oplus A$ (come A moduli)

iii) Se IJ è un ideale principale, allora I e J sono A moduli proiettivi.

Esercizio 4. Sia $I = (xz^2 + 3y^4t^2z^3, t^2 + xz^2, y^3z^2) \subset K[x, y, z, t]$ e sia $A = K[x, y, z]/I$.

i) Trovare il nilradicale $\mathcal{N} = \mathcal{N}(A)$ ed esprimerlo come intersezione irridondante di primi.

ii) Trovare l'insieme dei divisori di zero $\mathcal{D}(A/\mathcal{N})$.