Algebra II - I verifica Intermedia
Tracce delle soluzioni
10 Aprile 2014

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo con identitá e siano $I, J \subset A$ ideali. Per ognuna delle seguenti affermazioni, dimostrare, se vera, o trovare un controesempio, se falsa:

i) $I + J = A$ se e solo se $I^n + J^n = A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\sqrt{(I : J)} \subset (\sqrt{I} : J)$

iii) $\sqrt{(I : J)} = (\sqrt{I} : J)$

iv) $(I : J) = (I : \sqrt{J})$

Soluzione i) Basta provare che se $I + J = A$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ $I^n + J^n = A$, dato che l'altra implicazione e' immediata. Siano $i \in I$ e $j \in J$ tali che $i + j = 1$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $1 = (i + j)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} i^{2n-1-k} j^k + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} i^{2n-1-k} j^k \in I^n + J^n$.
ii) sia $a \in \sqrt{(I : J)}$, allora esiste m tale che $a^m j \in I$ for all $j \in J$, ossia $(aj)^m \in I$ da cui $aj \in \sqrt{I}$ e $a \in (\sqrt{I} : J)$.
iii) Questa affermazione è falsa : basta considerare gli ideali $I = (8)$ e $J = (6)$ in $\mathbb{Z}$. Si ha $(\sqrt{I} : J) = (2 : 6) = \mathbb{Z}$ mentre $\sqrt{(I : J)} = \sqrt{(4)} = (2)$.
iv) Anche questa affermazione è falsa. Consideriamo gli ideali $I = (12)$ e $J = (8)$ in $\mathbb{Z}$. Si ha $(I : J) = (12 : 8) = (3)$ mentre $(I : \sqrt{J} = (12 : 2) = (6)$.

Esercizio 2. Sia $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & 6 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \\ a & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{Z}$. Trovare, se esistono, i valori di a per cui:

i) coker(ϕ) non e' ciclico

ii) coker(ϕ) è finito.

Soluzione Con alcune operazioni elementari possiamo ridurre la matrice e ottenere:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

quindi sicuramente affinché coker(ϕ) sia finito si deve avere $a \neq 0$ e questo è anche l'unico valore da escludere dato che $\det(A) = -18a$. Considerando $\Delta_1 = (a, 3)$ si ha che $d_1 = \Delta_1 = 1$ se $gcd(a, 3) = 1$ e $d_1 = 3$ altrimenti. In questo ultimo caso, sicuramente coker(ϕ) non è ciclico. Se $(a, 3) = 1$ otteniamo che $\Delta_2 = (3a, 9) = (3(a, 3)) = (3)$ e quindi anche in questo caso coker(ϕ) non è ciclico.

Esercizio 3. Sia A un dominio di integrità e siano $I, J \subset A$ ideali, tali che $I + J = A$. Sia $\varphi : I \oplus J \longrightarrow A$ l'omomorfismo di A moduli dato da $\varphi(i, j) = i + j$. Provare che:

i) φ è surgettivo.

ii) $I \oplus J \cong IJ \oplus A$ (come A moduli)

iii) Se IJ è un ideale principale, allora I e J sono A moduli proiettivi.

Soluzione i) Si ha $\varphi(I \oplus J) = I + J = A$.
ii) Si ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(i, -i) \,|i \in I \cap J\}$, e quindi $\mathrm{Ker}(\varphi) \cong I \cap J$ come A modulo. Dato che $I + J = A$, vale $I \cap J = IJ$ e quindi otteniamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow IJ \longrightarrow I \oplus J \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

A è libero, e quindi proiettivo, cosí la successione spezza e si ha $I \oplus J \cong IJ \oplus A$.
iii) Se $IJ = (a)$ è principale allora $IJ \cong A$ come A modulo (A è un dominio) quindi dal punto precedente otteniamo che $I \oplus J \cong A^2$, cosí I e J sono addendi di un modulo libero e quindi proiettivi.

Esercizio 4. Sia $I = (xz^2 + 3y^4t^2z^3, t^2 + xz^2, y^3z^2) \subset K[x, y, z, t]$ e sia $A = K[x, y, z]/I$.

i) Trovare il nilradicale $\mathcal{N} = \mathcal{N}(A)$ ed esprimerlo come intersezione irridondante di primi.

ii) Trovare l'insieme dei divisori di zero $\mathcal{D}(A/\mathcal{N})$.

Soluzione i) Sia $\pi K[x, y, z] \longrightarrow A$ la proiezione. Si ha che $\mathcal{N}(A/I) = \sqrt{0} = \pi(\sqrt{I})$.
Vale $\sqrt{I} = \sqrt{(I, yz)} = \sqrt{(xz^2, t^2, yz)} = (xz, t, yz) = (x, t, y) \cap (z, t)$ (dato che è un ideale monomiale) e quindi $\mathcal{N}(A) = \pi(xz, t, yz) = \pi(x, t, y) \cap \pi(z, t)$

ii) Siano $p_1 = (x, t, y)$ e $p_2 = (z, t)$. I divisori di zero (non banali) di $\mathcal{D}(A/\mathcal{N})$ corrispondono agli elementi $a \in K[x, y, z]$, $a \notin p_1 \cap p_2$ per cui esiste $b \notin p_1 \cap p_2$ tali che $ab \in p_1 \cap p_2$, ossia gli elementi $a \in p_1 \cup p_2$. Infatti dato che $p_1 \cap p_2$ è una decomposizione irridondante, se $ab \in p_1 \cap p_2$ e $b \notin p_1 \cap p_2$ allora si deve avere $a \in p_1 \cup p_2$. Viceversa se

$a \notin p_1 \cup p_2$, $ab \in p_1 \cap p_2$ implica che $b \in p_1 \cap p_2$, (oppure basta osservare che p_1 e p_2 sono i primi associati a I). Quindi $\mathcal{D}(A/\mathcal{N}) = \pi(x, t, y) \cup \pi(z, t)$.