Algebra II - II verifica intermedia
29 Maggio 2015

Esercizio 1. Sia M un A-modulo e $I \subset A$ un ideale. Supponiamo che $M_{\mathfrak{m}} = 0$ per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ tale che $I \subset \mathfrak{m}$. Provare che $M = IM$.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

1. Un A-modulo proiettivo è finitamente presentato se e solo se è finitamente generato.

   (M si dice finitamente presentato se esiste una successione esatta $A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$ per qualche $m, m \in \mathbb{N}$)
2. Se $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n} \subset A$ sono due ideali massimali e M è un A-modulo allora si ha $M/\mathfrak{m}M \otimes_A M/\mathfrak{n}M = 0$.
3. Se $S = \{24^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $T = \{4^n 6^m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ allora si ha $S^{-1}\mathbb{Z} = T^{-1}\mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Sia A un anello noetheriano e sia $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo. Provare che $\mathfrak{p}$ è un primo minimale di A se e solo se esiste un elemento $a \in A$ non nilpotente e $n \in \mathbb{N}$ tale che $a\mathfrak{p}^n = 0$.

Esercizio 4. Sia $I = (2x+y+20xy+10y^2, 18) \subset \mathbb{Z}[x,y]$ e sia $A = \mathbb{Z}[x,y]/I$.

i) Esprimere il nilradicale di A come intersezione di primi.

ii) Calcolare $(I : 2)$.