Algebra II
Prima verifica intermedia-Tracce delle soluzioni
24 Aprile 2015

Esercizio 1. Siano $I, J \subset A$ ideali di un anello commutativo A:

i) Se $\sqrt{IJ} = A$ allora $I = A$ e $J = A$

ii) Se $\mathfrak{p} \subset A$ è un ideale primo e $IJ = \mathfrak{p}$ allora $I = \mathfrak{p}$ o $J = \mathfrak{p}$,

Soluzione i) Innanzitutto $\sqrt{IJ} = A$ se e solo se $IJ = A$. Dato che vale $IJ \subset I$ e $IJ \subset J$ la tesi segue.

ii) Si ha sicuramente che $\mathfrak{p} \subset I$ e $\mathfrak{p} \subset J$. Se $\mathfrak{p}$ non contenesse né I né J allora esisterebbero almeno due elementi $i \in I \setminus \mathfrak{p}$ e $j \in J \setminus \mathfrak{p}$. Però $ij \in IJ = \mathfrak{p}$ contro l'ipotesi che $\mathfrak{p}$ è primo.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

1. Sia $I \subset K[x_1, .., x_n]$ e sia $(Lt_>(I))$ il leading term ideal di I rispetto ad un ordinamento monomiale fissato. Se $(Lt_>(I))$ è primario allora I è primario.
2. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x]^3 \to \mathbb{Q}[x]^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice
$$B = \begin{pmatrix} (x-1) & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x(x-1)^3 \end{pmatrix}$$
allora $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{coker}(\phi) = 6$.
3. Sia A un anello. Ogni A-modulo M è libero se e solo se A è un campo.

Soluzione 1. Falso. Consideriamo l'ideale $(x^2-1) = (x+1) \cap (x-1) \subset K[x]$, che e' intersezione di due primi distinti e quindi non è primario, mentre $(Lt_>(I)) = (x^2)$ che è primario.

2. Vero. Si ha $\Delta_1 = (1)$, $\Delta_2 = (x(x-1))$ e $\Delta_3 = (x^2(x-1)^4)$ quindi la forma di Smith di B è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x(x-1) & 0 \\ 0 & 0 & x(x-1)^3 \end{pmatrix}$$

e $coker(\phi) \cong Q[x]/x(x-1) \oplus Q[x]/x(x-1)^3)$ e $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{coker}(\phi) = 6$.

ii) Vero. Se A è un campo M è uno spazio vettoriale quindi è libero. Viceversa, per ogni ideale $I \subset A$, l'A modulo A/I deve essere libero quindi $I = Ann(A/I) = (0)$. Se non esistono ideali non banali in A, A deve essere un campo.

Esercizio 3. Sia A un anello e $0 \neq M$ un A-modulo. Provare che:

i) se $\varphi \in End_A(M)$ e $\varphi^2 = \varphi$ allora $M \cong \varphi(M) \oplus (id - \varphi)(M)$.

ii) Se M è finitamente generato allora M è proiettivo se e solo se esistono $n \in \mathbb{N}$ e $f \in End_A(A^n)$ tale che $f^2 = f$ e $M \cong f(A^n)$.

Soluzione i) Ogni elemento di M, si pu ò scrivere come $m = \varphi(m) - (m - \varphi(m))$ quindi $M = \varphi(M) + (id - \varphi)(M)$ e questa somma è diretta, infatti se $n = \varphi(m_1) = (m_2 - \varphi(m_2)) \in \varphi(M) \cap (id - \varphi)(M)$ si ha $\varphi(n) = \varphi(m_1) = (\varphi(m_2) - \varphi(m_2) = 0$ e quindi $n = 0$.

ii) Dato che M è finitamente generato esiste $n \in \mathbb{N}$ e un omomorfismo $g : A^n \longrightarrow M$ surgettivo e quindi dato che M è proiettivo un omomorfismo $\sigma : M \longrightarrow A^n$ tale che $g \circ \sigma = id_M$. Definiamo $f : A^n \longrightarrow A^n$ come $f = \sigma \circ g$. Questo è un omomorfismo e $f^2 = \sigma \circ g \circ \sigma \circ g = f$. Inoltre $f(A^n) = \sigma(g(A^n)) \cong \sigma(M) \cong M$.

Viceversa. Se esiste $f \in End_A(A^n)$ tale che $f^2 = f$ allora $A^n \cong f(A^n) \oplus (id - f)(A^n) \cong M \oplus (id - f)(A^n)$. Allora M è addendo diretto di un modulo libero e quindi proiettivo.

Esercizio 4. Sia $I = (yt^2 + x^3z^2t^3, z^2 + yt^2, x^2t^2) \subset K[x, y, z, t]$ e sia $A = K[x, y, z, t]/I$.

i) I è un ideale monomiale?

ii) Decomporre I come intersezione minimale di ideali primari.

iii) Trovare il nilradicale $\mathcal{N}(A)$ ed esprimerlo come intersezione irridondante di primi.

iv) $\#V(I)$ è finita?

Soluzione. i) La base di Gröbner di I rispetto all'ordinamento $x > y > z > t$ è $\{x^2t^2, yt^2, z^2\}$ quindi I è monomiale.

ii) La decomposizione primaria minimale è $I = (x^2, y, z^2) \cap (z^2, t^2)$.

iii) Si ha $\mathcal{N}(A) = \sqrt{IA}$. Quindi dal punto 2. $\mathcal{N}(A) = ((x, y, z) \cap (t, z))A$.

iv) $\#V(I)$ non è finita, dato che nella base di Gr¨bner non esistono relazioni moniche per x, ye t.