Algebra II
II verifica intermedia-Tracce delle soluzioni
29 Maggio 2015

Esercizio 1. Sia M un A-modulo e $I \subset A$ un ideale. Supponiamo che $M_{\mathfrak{m}} = 0$ per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ tale che $I \subset \mathfrak{m}$. Provare che $M = IM$.

Soluzione Consideriamo $\overline{A} = A/I$, $\overline{M} = M/IM$ e $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$ per ogni massimale $\mathfrak{m} \supset I$. Se consideriamo $\overline{M}$, che è naturalmente un $\overline{A}$ modulo, per provare la tesi basta provare che $\overline{M} = 0$. Dato che gli ideali massimali di $\overline{A}$ sono esattamente i massimali di A che contengono I basta provare che $\overline{M}_{\overline{\mathfrak{m}}} = 0$ per i massimali $I \subset \mathfrak{m}$. Dato che $\overline{M}_{\overline{\mathfrak{m}}} \cong M_{\mathfrak{m}}/IM_{\mathfrak{m}} = 0$ per ogni $\overline{\mathfrak{m}} \subset \overline{A}$, ed essere 0 è una proprietà locale, la tesi e' provata.
Dimostrazione alternativa. Supponiamo per assurdo che $IM \subsetneq M$. Sia $m \in M \setminus IM$. Allora $I \subset (IM : m) \neq A$. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale tale che $I \subseteq (IM : m) \subseteq \mathfrak{m}$. Allora l'ipotesi che $M_{\mathfrak{m}} = 0$ implica che $\frac{m}{1} = 0 \in M_{\mathfrak{m}}$ e quindi che esiste $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ tale che $am = 0$ che contraddice la scelta di $\mathfrak{m}$.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

1. Un A-modulo proiettivo è finitamente presentato se e solo se è finitamente generato.

   (Un A-modulo M si dice finitamente presentato se esiste una successione esatta $A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$ per qualche $m, m \in \mathbb{N}$)

2. Se $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n} \subset A$ due ideali massimali e M un A-modulo allora $M/\mathfrak{m}M \otimes_A M/\mathfrak{n}M = 0$.

3. Se $S = \{24^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $T = \{4^n 6^m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ allora $S^{-1}\mathbb{Z} = T^{-1}\mathbb{Z}$.

Soluzione 1. VERO. Se M è proiettivo finitamente generato allora l'omomorfismo surgettivo $A^n \longrightarrow M$ spezza, quindi M è fattore diretto di A^n e si ha $A^n \cong M \oplus N$. Dato che $M \oplus N$ è allora finitamente generato, si deve avere che anche N è finitamente generato. Se scegliamo m generatori di N, dalla successione esatta

$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ otteniamo cosí la successione che cercavamo $A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$. E' chiaro che il viceversa vale sempre.

ii) VERO. Si ha $M/\mathfrak{m}M \otimes_A M/\mathfrak{n}M \cong (A/\mathfrak{m} \otimes_A M) \otimes_A (A/\mathfrak{n} \otimes M) \cong A/(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \otimes M \otimes M = 0$, dato che $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = A$.

iii) VERO. Si ha $S \subset T$ e ogni elemento di T è invertibile in $S^{-1}\mathbb{Z}$, infatti $\frac{t}{1} = \frac{4^n 6^m}{1} = \frac{24^k}{4^{k-n}6^{k-m}}$, con $k = \max(m, n)$. In particolare se $V = \{2^n 3^m\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ si ha $S^{-1}\mathbb{Z} = T^{-1}\mathbb{Z} = V^{-1}\mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Sia A un anello noetheriano e sia $\mathfrak{p} \subset A$ in ideale primo di A. Provare che $\mathfrak{p}$ è un primo minimale di A se e solo se esiste un elemento $a \in A$ non nilpotente e $n \in \mathbb{N}$ tale che $a\mathfrak{p}^n = 0$.

Soluzione Sia $\mathfrak{p} \subset A$ un primo minimale, allora se si considera la decomposizione, come intersezione di primi miniali, del nilradicale di A si ha $\mathfrak{N}(A) = \sqrt{(0)} = \mathfrak{p} \cap (\cap \mathfrak{p}_i)$. Sia $b \in \cap \mathfrak{p}_i$ e $b \notin \mathfrak{p}$, allora $b \notin \mathfrak{N}(A)$ non è nilpotente ed è tale che $b\mathfrak{p} \subset \mathfrak{N}(A)$. Quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(b\mathfrak{p})^n = (0)$ quindi $a = b^n$ è l'elemento cercato.
Viceversa, se esiste $a \in A \setminus \mathfrak{N}(A)$ tale che $a\mathfrak{p}^n = (0)$ allora $\mathfrak{p}^n \subset (0 : a) \neq A$. Se si considera la decomposizione primaria minimale di $(0) = \cap \mathfrak{q}_i$, con i $\mathfrak{q}_i$ ideali $\mathfrak{p}_i$-primari, si ha $(0 : a) = \cap(\mathfrak{q}_i : a)$. Gli ideali $(\mathfrak{q}_i : a)$ sono uguali a 1 se $a \in \mathfrak{q}_i$ o $\mathfrak{p}_i$ primari se $a \notin \mathfrak{q}_i$. In questo ultimo caso $(\mathfrak{q}_i : a) = \mathfrak{p}_i$ se $a \notin \mathfrak{p}_i$. Se consideriamo i primari tali che $a \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{q}_i$ per ogni i esiste s_i tale che $a^{s_i} \in \mathfrak{q}_i$, se allora $s = \max\{s_i\}$ e $b = a^s$ otteniamo che $b \notin \mathfrak{N}(A)$, $b\mathfrak{p}^n = (0)$ e $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p} \subset \sqrt{(0 : b)} = \cap \mathfrak{p}_i$ dove ora i $\mathfrak{p}_i$ sono i primi di A che non contengono b. Allora esiste i tale che $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$ e quindi $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ per un primo minimale.

Esercizio 4. Sia $I = (2x + y + 20xy + 10y^2, 18) \subset \mathbb{Z}[x, y]$ e sia $A = \mathbb{Z}[x, y]/I$.

i) Esprimere il nilradicale di A come intersezione di primi.

ii) Calcolare $(I : 2)$.

Soluzione.

i) Cerchiamo i primi in $\mathbb{Z}[x, y]$ minimali tra quelli che che contengono l'ideale I. Se $\mathfrak{p}$ è uno di tali primi allora sicuramente o $2 \in \mathfrak{p}$ o

$3 \in \mathfrak{p}$. Nel primo caso si ha allora che $(I, 2) = (y, 2) \subset \mathfrak{p}$ e quindi per minimalità, dato che $(y, 2)$ è primo $\mathfrak{p} = (y, 2)$. Se consideriamo i primi che contengono 3 allora $(I, 3) = ((y + 1)(y + 2x), 3)\mathfrak{p}$. Di nuovo dato che $(y + 1)$ e$(2x + y)$ che sono irriducibili modulo 3 si deve avere per minimalità $\mathfrak{p} = (y + 1, 3)$ o $\mathfrak{p} = (y + 2x, 3)$. Quindi $\mathfrak{N}(A) = (y, 2)A \cap (y + 1, 3)A \cap (y + 2x, 3)A$
ii) Si ha $I = (I, 2) \cap (I, 9)$, come visto sopra $(I, 2)$ è primo, mentre $(I, 9)$ è intersezione di primari tali che i primi associati contengono 3 (e quindi non contengono 2).
Da questo segue che $(I : 2) = ((I, 2) : 2) \cap ((I, 9) : 2) = (I, 9)$