Algebra II - Esercizi - 1
Alcune Soluzioni

1. Sia A un anello tale che per ogni ideale I non contenuto nel nilradicale esiste $x \neq 0,\ x \in I$ tale che $x^2 = x$. Provare che il radicale di Jacobson e il nilradicale di A sono uguali.

   Soluzione Sia J il radicale di Jacobson di A e N il nilradicale. Poiche' $N \subseteq J$ e' sufficiente provare l'inclusione opposta. Supponiamo che $J \not\subset N$. Allora $\exists x \neq 0,\ x \in J$ tale che $x^2 = x$. Allora $x(x-1) = 0$, poiche' $x \in J$, $x - 1$ e' invertibile da cui si avrebbe $x = 0$ contro l'ipotesi.

2. Sia A un anello, $\mathcal{R}$ il nilradicale. Allora sono fatti equivalenti:

   i) A possiede un unico ideale primo
   ii) ogni elemento di A è invertibile oppure nilpotente
   iii) $A/\mathcal{R}$ è un campo

   Soluzione $i) => ii)$. In questo caso A e' un anello locale e $\mathcal{R} = \mathfrak{m}$. Se $x \in \mathfrak{m}$ allora e' nilpotente altrimenti $(x, \mathfrak{m}) = 1$ e quindi esistono $y \in A$, $m \in \mathfrak{m}$, tali che $1 = xy + m$, dato che m e' nilpotente $1 - m = xy$ e' una unita' di A e quindi x e' invertibile.

   $ii) => iii)$. Se x e' nilpotente $x \in \mathcal{R}$ e quindi $\bar{x} = 0$ in $A/\mathcal{R}$; se x non e' nilpotente x e' invertibile in A e quindi anche in $A/\mathcal{R}$. Cosi' ogni elemento $\bar{x}\ \neq 0$ e' invertibile in $A/\mathcal{R}$ che quindi e' un campo.

   $iii) => i)$ Sia $P \subset A$ primo. $\mathcal{R} = \cap_{\mathcal{P}} P_i \subset P$, con $\mathcal{P} = \{$ primi di $A\}$, ma poiche' $\mathcal{R}$ e' massimale si ha $\mathcal{R} = P$, ossia esiste solo un primo $P \subset A$.

3. Sia A un dominio di integrita' con la proprieta' che ogni ideale proprio di A e' prodotto di un numero finito di ideali massimali. Provare che:

   - se $\mathfrak{m} \subset A$ e' un ideale massimale allora esistono un elemento $x \in A$ e un ideale $I \neq 0$ tali che $I\mathfrak{m} = (x)$.
   - se J, L e $\mathfrak{m}$ sono ideali di A e $\mathfrak{m}$ e' massimale allora $J\mathfrak{m} = L\mathfrak{m}$ implica $J = L$.

   Soluzione Se $\mathfrak{m} = (0)$ allora A e' un campo e basta considerare $x = 0$ e $I = (1)$. Sia quindi $\mathfrak{m} \neq (0)$ e sia $x \in \mathfrak{m}$, $x \neq 0$, allora per ipotesi $(x) = \mathfrak{m}_1..\mathfrak{m}_k$ e' prodotto di ideali massimali. Poiche' $(x) = \mathfrak{m}_1..\mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_1 \cap .. \cap \mathfrak{m}_k \subset \mathfrak{m}$ esiste i tale che $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}$ e dato che $\mathfrak{m}_i$ e' massimale, $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}$. Se poniamo $I = \mathfrak{m}_1..\mathfrak{m}_{i-1}\mathfrak{m}_{i+1}..\mathfrak{m}_k$ si ha la tesi.

   Se A e' un campo la tesi e' ovvia visto che $J = L = (0)$. Supponiamo quindi che A non sia un campo e che $J\mathfrak{m} = L\mathfrak{m}$. Siano $x \neq 0$ e $I \neq 0$ tali che $I\mathfrak{m} = (x)$, moltiplicando per I si ottiene $J(x) = J\mathfrak{m}I = L\mathfrak{m}I = L(x)$, da cui per ogni $j \in J$ esiste $l \in L$ tle che $jx = lx$ ossia $x(j-l) = 0$, poiche' $x \neq 0$ e A e' un dominio $j = l$ e quindi la tesi.

4. Sia A un anello commutativo con identita'. Provare che se un elemento $a \in A$ e' tale che:

   - $a \in \mathbf{J}(A)$, ($\mathbf{J}(A)$ indica il radicale di Jacobson di A)
   - a e' idempotente modulo $I \subset A$ ideale di A,ossia $(a+I)^2 = a+I$,

   allora $a \in I$.

   Soluzione Per ipotesi per ogni $b \in I$ esiste $c \in I$ tale che $(a+b)^2 = (a+c)$. Quindi $a(1-a) = 2ab + b^2 - c \in I$. Poiche' $a \in \mathbf{J}(A)$, $1-a$ e' una unita' e quindi $a \in I$.

5. Siano I, J, K ideali di un anello A, tali che:

   (i) $J \subseteq K$

   (ii) $I \cap J = I \cap K$

   (iii) $(J+I)/I = (K+I)/I$

   Provare che $J = K$.

   Soluzione. Per (i), basta provare che $K \subseteq J$. Sia dunque $k \in K$. Per (iii) esistono $j \in J$, $i_1, i_2 \in I$, tali che $k + i_1 \equiv j + i_2 \pmod{I}$, quindi, dato che $J \subseteq K$, $k - j \in I \cap K = I \cap J$ da cui segue $k \in J$.

6. Sia A un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ principale Provare che valgono i seguenti fatti:

   (i) $\forall a, b \in \mathfrak{m},\ a, b \neq 0$ si ha che

   $$(a) = (b) \Longleftrightarrow a = bu, \quad u \in A \text{ invertibile}$$

   (ii) Se $\mathfrak{m} = (m) \neq (0)$, allora m e' un elemento irriducibile di A

   Soluzione. (i) Se$(a) = (b)$ esistono $r, s \in A$ tali che $a = rb$ e $b = sa$. Supponiamo che r non sia invertibile. Allora $r \in \mathfrak{m}$. In questo caso, $1 - rs$ e' invertibile e quindi dalla relazione $(1-rs)a = 0$ si ottiene $a = 0$ contro le ipotesi. Il viceversa e' ovvio.

   (ii) Sia $m = ab$ e supponiamo che a non sia un'unita'. Allora per la prima parte della dimostrazione $(m) \subsetneq (b)$. Per la massimalita' di $\mathfrak{m}$ allora $(b) = A$ e quindi m e' irriducibile.

7. Sia A un anello tale che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

   i) Il radicale di Jacobson di A, $\mathfrak{J}(A)$, e' un ideale primo, diverso da (0).

   ii) Ogni ideale $I \supseteq \mathfrak{J}(A)$ e' principale.

   iii) $\mathfrak{D}(A) = \{$ divisori di zero di $A\} \subseteq \mathfrak{J}(A)$.

Allora A e' un anello locale e $\mathfrak{J}(A)$ e' massimale.

Soluzione. Bastera' dimostrare che ogni elemento $a \notin \mathfrak{J}(A)$ e' invertibile in A. Per (ii) esiste $x \in A$ tale che $\mathfrak{J}(A) = (x)$ e se $a \notin \mathfrak{J}(A)$ allora $(\mathfrak{J}(A), a) = (b)$ e $b \notin \mathfrak{J}(A)$. Da questo segue che $x = by$ per $y \in A$. Poiche' $\mathfrak{J}(A)$ e' primo e $b \notin \mathfrak{J}(A)$, si deve avere $y \in \mathfrak{J}(A)$, quindi $y = cx$ con $c \in A$. Cosi' otteniamo $x = by = bcx$, ossia $x(1-bc) = 0$ e quindi per (iii) che $1-bc \in \mathfrak{J}(A)$. Allora $1-(1-bc) = bc$ e' invertibile e quindi b e' invertibile in A e $(\mathfrak{J}(A), a) = A$. Allora esiste $s \in A$ tale che $1 - sa \in \mathfrak{J}(A)$ e come prima da questo segue che a e' invertibile, come volevamo.

8. Sia A un anello commutativo con identita' e sia $I \subset A$ un ideale contenuto nel nilradicale di A. Provare che A e' locale se e solo se A/I e' locale.

   Soluzione. Per la corrispondenza fra ideali di A e A/I e' immediato che se A e' locale anche A/I e' locale. Supponiamo quindi che A/I sia locale e sia $\bar{\mathfrak{m}}$ il suo ideale massimale e sia $\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m} \subset A$ (dove $\pi : A \longrightarrow A/I$ e' la proiezione canonica). Se proviamo che ogni elemento $a \notin \mathfrak{m}$ e' invertibile, allora A e' locale e $\mathfrak{m}$ e' il suo ideale massimale. Sia $a \notin \mathfrak{m}$, allora $\pi(a) \notin \bar{\mathfrak{m}}$ e quindi $\pi(a)$ e' invertibile in A/I ossia esiste $\bar{b} = \pi(b)$ tale che $\pi(a)\bar{b} = 1$ in A/I, da cui segue $ab = 1 + i$ con $i \in I$. Poiche' I e' contenuto nel nilradicale di A, $1 + i$ e' invertibile da cui la tesi.

9. Sia A un anello commutativo con identita'. Provare che se per ogni $x \in A$ esiste $n > 1$ tale che $x^n = x$, allora ogni ideale primo di A e' massimale.

   Soluzione. Proviamo la tesi dimostrando che se I e' ideale primo, allora in A/I ogni elemento diverso da zero e' invertibile. Sia dunque $\bar{x} \in A/I$, $\bar{x} \neq 0$. Per ipotesi si ha che $\bar{x}(\bar{x}^{n-1} - 1) = 0$ e quindi poiche' A/I e' un dominio d'integrita' si ha la tesi.

10. Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo surgettivo di anelli . Provare che:

    i) Se $I \subset A$ e' un ideale di A, tale che $\ker\varphi \subseteq I$ allora $\sqrt{(\varphi(I))} = (\varphi(\sqrt{I}))$.
    ii) Se $J \subset B$ e' un ideale di B allora $\sqrt{\varphi^{-1}(J)} = \varphi^{-1}(\sqrt{J})$.

    Soluzionei) Osserviamo innanzitutto che, per la surgettivita' di φ si ha che $\varphi(I) = (\varphi(I))$ e quindi per ogni elemento $a \in (\varphi(I))$ esiste $c \in I$ tale che $a = \varphi(c)$.

    Sia $a = \varphi(c) \in (\varphi(\sqrt{I}))$, con $c^m \in I$. A $a^m = (\varphi(c))^m = \varphi(c^m) \in \varphi(I)$ da cui $a \in \sqrt{(\varphi(I))}$.

    Per l'altra inclusione sia $a = \varphi(c) \in \sqrt{(\varphi(I))}$, e sia m tale che $a^m = \varphi(b) \in (\varphi(I))$. Quindi si ha che $c^m - b \in \ker\varphi \subset I$, ossia $c \in \sqrt{(I)}$ e cosi' $a \in (\varphi(\sqrt{I}))$.

    (ii) Si ha che $a \in \sqrt{\varphi^{-1}(J)} \iff a^m \in \varphi^{-1}(J) \iff \varphi(a^m) \in J \iff (\varphi(a))^m \in J \iff \varphi(a) \in \sqrt{J} \iff a \in \varphi^{-1}(\sqrt{J})$.

11. Sia A un anello a ideali principali e sia $\mathfrak{D}$ l'insieme dei divisori di zero di A. Provare che se $\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{D} \neq (0)$ (dove $\mathfrak{J}(A)$ e' il radicale di Jacobson di A) allora A e' un anello locale.

    Soluzione Osserviamo innanzitutto che l'ideale $\mathfrak{J}(A) = (j)$ e' primo. Infatti se $ab \in \mathfrak{J}(A) = \mathfrak{D}$ allora esiste $v \neq 0$ tale che $vab = 0$ da cui segue che o a o b e' in $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}(A)$. Per provare la tesi, bastera' dimostrare che se $x \notin \mathfrak{J}(A)$ allora $(x, \mathfrak{J}(A)) = A$. Sia $(x, J(A)) = (x, j) = (a)$, dove $a \notin \mathfrak{J}(A)$. Si ha che $j = ab$ con $b \in \mathfrak{J}(A)$, poiche' $\mathfrak{J}(A)$ e' primo e possiamo scrivere $b = jk$, da cui segue che $j(1 - ak) = 0$ e quindi che $1 - ak \in \mathfrak{D} = \mathfrak{J}(A)$. Allora $1 - (1 - ak) = ak$ e' invertibile e quindi $(x, J(A)) = (a) = A$.

12. Sia A un anello commutativo con identita'. Provare che se $f = \sum f_i x^i, g = \sum g_i x^i \in A[x]$ sono tali che $(f_0, .., f_n) = (g_0, .., g_m) = A$ allora anche $h = \sum h_i x^i = fg$ e' tale che $(h_0, .., h_s) = A$.

    Soluzione 1. Se $(h_0, .., h_s) \neq A$ esiste un ideale massimale $\mathfrak{m} \supseteq (h_0, .., h_s)$, e d'altra parte, per ipotesi, esistono f_i e g_j che non appartengono ad $\mathfrak{m}$. Siano r, s i minimi indici per cui $f_r, g_s \notin \mathfrak{m}$. Allora da $h_{r+s} = \sum_{i=0}^{r+s} f_i g_{r+s-i} = \sum_{i=0}^{r-1} f_i g_{r+s-i} + f_r g_s + \sum_{i=r+1}^{r+s} f_i g_{r+s-i}$ si otterrebbe $f_r g_s \in \mathfrak{m}$. Assurdo.

    Soluzione 2 Se $(h_0, .., h_s) \neq A$ esiste un ideale massimale $\mathfrak{m} \supseteq (h_0, .., h_s)$, allora $fg \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}[x]}$ e questo e' assurdo poiche' $A[x]/\mathfrak{m}[x]$ e' un dominio e $f, g \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$.

13. Sia A un anello commutativo con identita'. Sia $a \in A$, definiamo $I_a = \{ax - x |\ x \in A\}$ e diciamo che a e' un elemento *quasi-regolare* se $I_a = A$. Provare che:

    i) $\forall a \in A$, I_a e' un ideale,
    ii) $a \in A$ e' quasi regolare se e solo se $\exists c \in A$ tale che $a + c - ac = 0$
    iii) ogni nilpotente e' quasi-regolare
    iv) se ogni elemento di A diverso da 1 e' quasi-regolare allora A e' un campo.

    Soluzione.(i) Siano $b_1 = ax_1 - x_1, b_2 = ax_2 - x_2 \in I_a$ allora $b_1 + b_2 = a(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)$ e $kb_1 = a(kx_1) - (kx_1)$ sono elementi di I_a. Oppure basta osservare che I_a e' l'ideale generato da $1 - a$ in A. Quindi a e' quasi regolare se e solo se $1 - a$ e' invertibile.

    (ii) Se a e' quasi regolare allora $a \in I_a$, quindi esiste $c \in A$ tale che $a = ac - c$. Viceversa, proviamo che $\forall d \in A$, $d \in I_a$. Per ipotesi $a = ac - c$ quindi $a \in I_a$ quindi $\forall d \in A$ se consideriamo $ad \in I_a$ e dalla definizione di I_a anche $ad - d \in I_a$. Quindi $d = ad - (ad - d) \in I_a$.

    (iii) Sia a nilpotente e n tale che $a^n = 0$. Consideriamo $b = -a - a^2 - .. - a^{n-1}$ allora $a + b - ab = 0$ e quindi per il punto (ii) a e' quasi regolare.

    (iv) Sia $a \in A$, $a \neq 0, 1$, proviamo che a e' invertibile. a e' un elemento quasi regolare quindi $1 - a$ e' invertibile. Allora esiste $x \neq 0$ tale che

$x(1-a) = x - ax = 1$ e quindi $ax = x - 1$, poiche $x \neq 1$ x e' quasi regolare, quindi $x - 1$ e' invertibile, da cui si ha la tesi.