Algebra II - Anelli e ideali - 1

1. Sia A un anello tale che per ogni ideale I non contenuto nel nilradicale esiste $x \neq 0,\ x \in I$ tale che $x^2 = x$. Provare che il radicale di Jacobson e il nilradicale di A sono uguali.

2. Sia A un anello, $\mathcal{R}$ il nilradicale. Allora sono fatti equivalenti:
   - A possiede un unico ideale primo
   - ogni elemento di A è invertibile oppure nilpotente
   - $A/\mathcal{R}$ è un campo

3. Sia A un dominio di integrita' con la proprieta' che ogni ideale proprio di A e' prodotto di di un numero finito ideali massimali. Provare che:
   - se $\mathfrak{m} \subset A$ e' un ideale massimale allora esistono un elemento $x \in A$ e un ideale $I \neq 0$ tali che $I\mathfrak{m} = (x)$.
   - se J, L e $\mathfrak{m}$ sono ideali di A e $\mathfrak{m}$ e' massimale allora $J\mathfrak{m} = L\mathfrak{m}$ implica $J = L$.

4. Sia A un anello commutativo con identita'. Provare che se un elemento $a \in A$ e' tale che:
   - $a \in \mathbf{J}(A)$, ($\mathbf{J}(A)$ indica il radicale di Jacobson di A)
   - a e' idempotente modulo $I \subset A$ ideale di A,ossia $(a + I)^2 = a + I$,

   allora $a \in I$.

5. Siano I, J, K ideali di un anello A, tali che:
   (i) $J \subseteq K$
   (ii) $I \cap J = I \cap K$
   (iii) $(J + I)/I = (K + I)/I$

   Provare che $J = K$.

6. Sia A un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ principale Provare che valgono i seguenti fatti:
   (i) $\forall a, b \in \mathfrak{m},\ a, b \neq 0$ si ha che
   $$(a) = (b) \Longleftrightarrow a = bu, \quad u \in A \text{ invertibile}$$
   (ii) Se $\mathfrak{m} = (m) \neq (0)$, allora m e' un elemento irriducibile di A

7. Sia A un anello tale che le seguenti condizioni siano soddisfatte:
   i) Il radicale di Jacobson di A, $\mathfrak{J}(A)$, e' un ideale primo, diverso da (0).
   ii) Ogni ideale $I \supseteq \mathfrak{J}(A)$ e' principale.

iii) $\mathfrak{D}(A) = \{$ divisori di zero di $A\} \subseteq \mathfrak{J}(A)$.

Allora A e' un anello locale e $\mathfrak{J}(A)$ e' massimale.

8. Sia A un anello commutativo con identita' e sia $I \subset A$ un ideale contenuto nel nilradicale di A. Provare che A e' locale se e solo se A/I e' locale.

9. Sia A un anello commutativo con identita'. Provare che se per ogni $x \in A$ esiste $n > 1$ tale che $x^n = x$, allora ogni deale primo di A e' massimale.

10. Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo surgettivo di anelli . Provare che:

    i) Se $I \subset A$ e' un ideale di A, tale che $\ker\varphi \subseteq I$ allora $\sqrt{(\varphi(I))} = (\varphi(\sqrt{I}))$.

    ii) Se $J \subset B$ e' un ideale di B allora $\sqrt{\varphi^{-1}(J)} = \varphi^{-1}(\sqrt{J})$.

11. Sia A un anello a ideali principali e sia $\mathfrak{D}$ l'insieme dei divisori di zero di A. Provare che se $\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{D} \neq (0)$ (dove $\mathfrak{J}(A)$ e' il radicale di Jacobson di A) allora A e' un anello locale.

12. Sia A un anello commutativo con identita'. Provare che se $f = \sum f_i x^i, g = \sum g_i x^i \in A[x]$ sono tali che $(f_0, .., f_n) = (g_0, .., g_m) = A$ allora anche $h = \sum h_i x^i = fg$ e' tale che $(h_0, .., h_s) = A$.

13. Sia A un anello commutativo con identita'. Sia $a \in A$, definiamo $I_a = \{ax - x| \; x \in A\}$ e diciamo che a e' un elemento *quasi-regolare* se $I_a = A$. Provare che:

    i) $\forall a \in A$, I_a e' un ideale,

    ii) $a \in A$ e' quasi regolare se e solo se $\exists c \in A$ tale che $a + c - ac = 0$

    iii) ogni nilpotente e' quasi-regolare

    iv) se ogni elemento di A diverso da 1 e' quasi-regolare allora A e' un campo.