Esercizi di Algebra II
Foglio 2 - Anelli e ideali

1. Sia x un elemento nilpotente di A. Provare che $1 + x$ è un'unità di A. Dedurre che la somma di un elemento nilpotente e di un'unità è un'unità.

2. Sia $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$.

   (a) p è invertibile se e solo se a_0 è invertibile e $a_1, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.

   (b) p è nilpotente se e solo se $a_0, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.

   (c) p è zerodivisore se e solo se esiste $a \in A$ t.c. $ap = 0$.

   (d) $f, g \in A[x]$ sono primitivi se e solo se fg è primitivo.

   Generalizzare l'esercizio ad $A[x_1, \ldots, x_n]$.

3. In $A[x]$ il radicale di Jacobson e il nilradicale coincidono.

4. Sia $p(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i \in A[[x]]$.

   (a) p è invertibile se e solo se a_0 è invertibile.

   (b) Se p è nilpotente allora $\forall i \;\; a_i$ e' nilpotente. È vero il viceversa?

   (c) $p \in \mathfrak{J}(A[[x]])$ se solo se $a_0 \in \mathfrak{J}(A)$ (dove $\mathfrak{J}(A)$ indica il radicale di Jacobson di A). .

   (d) la contrazione di un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di $A[[x]]$ è un ideale massimale di A e $\mathfrak{m}$ è generato da $\mathfrak{m}^c$ e x.

   (e) Ogni ideale primo di A è la contrazione di un ideale primo di $A[[x]]$.

5. Siano $I, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ideali di A con $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ideali primi. Provare che se $I \subseteq \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ allora esiste i per cui $I \subseteq \mathfrak{p}_i$.

6. Siano $\mathfrak{p}, I_1, ..., I_n$ ideali di A con $\mathfrak{p}$ ideale primo. Provare che se $\cap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$, allora esiste i per cui $I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

7. Sia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di un anello A. Allora $\sqrt{\cup_\alpha E_\alpha} = \cup_\alpha \sqrt{E_\alpha}$

8. Sia D l'insieme degli zero divisori di un anello A. Provare che $D = \cup_{x \neq 0} \sqrt{\mathrm{Ann}(x)}$.

9. Sia A un anello, Σ l'insieme di tutti gli ideali in cui ogni elemento è uno zerodivisore. Allora Σ possiede elementi massimali e ogni elemento massimale è un ideale primo. (Quindi l'insieme degli zerodivisori è unione di ideali primi).

10. Sia A un anello tale che per ogni ideale I non contenuto nel nilradicale esiste $x \neq 0$, $x \in I$ tale che $x^2 = x$. Allora il radicale di Jacobson e il nilradicale coincidono.

11. Sia A un anello in cui per ogni elemento x esiste $n > 1$ tale che $x^n = x$. Allora ogni ideale primo è massimale.
12. Sia A un anello. Provare che l'insieme degli ideali primi di A possiede elementi minimali rispetto all'inclusione.
13. Sia A un anello. Provare che $A \cong A_1 \times A_2$ se e soltanto se esiste $e \neq 0, 1$ tale che $e^2 = e$.
14. Siano I, J due ideali coprimi di un anello A. Allora $I \cap J = I \cdot J$.
15. Sia A un dominio infinito con un numero finito di elementi invertibili. Allora A possiede un numero infinito di ideali massimali.
16. Sia A un anello, $\mathcal{R}$ il nilradicale. Allora sono fatti equivalenti:
    - A possiede un unico ideale primo
    - ogni elemento di A è invertibile oppure nilpotente
    - $A/\mathcal{R}$ è un campo
17. Un anello locale non contiene idempotenti diversi da $0, 1$.
18. Un anello si dice booleano se $x^2 = x$ per ogni $x \in A$. Provare che se A è booleano allora:
    - $2x =$ per ogni $x \in A$
    - ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ è massimale e $A/\mathfrak{p}$ è un campo con due elementi
    - ogni ideale finitamente generato è principale.