**Algebra II - Esercizi - 3**
**Alcune Soluzioni**

1. Sia $A = K[x_1, .., x_n]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo $K$.

   (i) Si $I = (m_1, .., m_t) \subset A$ e' un ideale monomiale e $m \in A$ un monomio, provare che l'ideale $(I : m)$ e' generato dai monomi $m_i/\gcd(m_i, m)$.

   (ii) Siano $I_1 = (m_1, ..m_t)$ e $I_2 = (n_1, .., n_s)$ ideali monomiali di $A$. Provare che $I_1 \cap I_2$ e' generato dagli elementi $\mathrm{mcm}(m_i, n_j)$. Provare che se i generatori di $I_1$ e $I_2$ sono minimali, $I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$ se e solo se i due insiemi di generatori non hanno variabili in comune.

   **Soluzione.** (i) Indichiamo con $d_i = \gcd(m_i, m)$, cosi' $m_i = a_i d_i$ e $m = b_i d_i$ con $(a_i, b_i) = 1$. $(I : m) = \{f \in A \mid fm \in I\}$ quindi $a_i m = a_i b_i d_i = b_i m_i \in I$ e $(a_1, .., a_i) \subset (I : m)$. Viceversa se $f = \sum n_i$ e' la scrittura di $f$ in termini dei suoi monomi, poiche' $I$ e' monomiale da $fm = \sum n_i m$ si ha che per ogni $i$ esiste $m_{k_i}$ tale che $n_i m = c_i m_{k_i} = c_i a_{k_i} d_{k_i} = n_i b_{k_i} d_{k_i}$ da cui segue che $a_{k_i} \mid n_i$ e quindi $f \in (a_1, .., a_t)$.

   (ii)Indichiamo con $d_{ij} = mcm(m_i, n_j)$. E' ovvio che l'ideale generato dai $d_{ij}$ e' contenuto in $I_1 \cap I_2$. Viceversa se $m \in I_1 \cap I_2$ allora esistono $i, j$ tali che $m = am_i = bn_j$ e quindi $m = cd_{ij}$.

   Supponiamo ora che $(m_1, .., m_t)$ e $(n_1, .., n_s)$ siano insiemi minimali di generatori. Dalla prima parte segue che se i due insiemi di generatori non hanno variabili in comune i minimi comun multipli sono i prodotti e quindi la parte "se" segue. Viceversa proviamo che se due monomi hanno delle variabili in comune non si puo' avere l'uguaglianza. Siano dunque $m_i = at$ e $n_j = bt$ con $t \neq 1$ due monomi di grado minimo con un fattore comune, tali che $a$ sia di grado minimo con questa proprieta'. Si ha $abt \in I_1 \cap I_2$ . Se $abt \in I_1 I_2$ allora $abt$ dovrebbe essere divisibile per uno dei prodotti $m_k n_r$ ma per le ipotesi di minimalita' sui gradi questo non puo' accadere.

2. Sia $I = (x^2z + 2x^3t^2y^3, xt^2 + x^2z, x^2y^3) \subset K[x, y, z, t]$. Determinare il radicale di $I$ e i primi associati.

   **Soluzione** Si ha che $I = (x^2z, xt^2, x^2y^3)$ quindi $I$ e' monomiale. Allora $\sqrt{I} = (xz, xt, xy) = (x) \cap (z, t, y)$

3. Dato l'ideale $I = (y^2 - x^4, x^2 - 2x^3 - x^2y + 2xy + y^2 - y) \subset K[x, y, z]$, ($K$ campo algebricamente chiuso di caratteristica 0), descrivere le componenti irriducibili di $\mathbf{V}(I)$.

   **Soluzione.**Poiche' $x^2 - 2x^3 - x^2y + 2xy + y^2 - y = (y - x^2)(y - 2x - 1)$ e $y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2)$ si ha che $\mathbf{V}(I) =\mathbf{V}(y - x^2)\cup$ $\mathbf{V}(y + x^2, y - 2x - 1)$. Proviamo che queste due componenti sono irriducibili. Infatti $k[x, y, z]/(y - x^2) \sim k[x, z]$ quindi $(y - x^2)$ e' primo e cosi' $\mathbf{V}(y - x^2)$ e' irriducibile. Per quanto riguarda la seconda componente $(y + x^2, y - 2x - 1) = ((x+1)^2, y-2x-1)$ e quindi $\mathbf{V}(y+x^2, y-2x-1) = \{(-1, -1, a),\ a \in$

$k\}$ e' irriducibile. Nessuna delle due componenti contiene l'altra, quindi la decomposizione trovata e' la decomposizione irriducibile di $I$

4. Descrivere $V(I)$ come unione di varieta' irriducibili.
$I = (x^2zt, yt^3, xyzt, x^5z^6) \subset K[x, y, z, t]$.

   **Soluzione** E' sufficiente trovare una decomposizione del radicale di $I$. Si ha che $\sqrt{I} = (xzt, yt, xyzt, xz) = (yt, xz) = (x, y) \cap (y, z) \cap (x, t) \cap (z, t)$. Quindi $V(I) = V(x, y) \cup V(y, z) \cup V(x, t) \cup V(z, t)$.

5. Dati gli ideali $I = (x-y+z^2, y-z-1, z^3)$ e $J = (x^2-z-1, y^2+z-1, z(z-1))$ di $\mathbb{C}[x, y, z]$ provare che $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.

   **Dim.** Si ha che $I \subset (x - 1, y - 1, z) \subset \sqrt{I}$, poiche' $(x - 1, y - 1, z)$ e' massimale $(x-1, y-1, z) = \sqrt{I}$. Poiche' $V(I) = \{(1, 1, 0)\} \subset V(J)$ allora $I(V(J)) = \sqrt{J} \subset I(V(I)) = \sqrt{I}$.

6. Dato l'ideale $I = (x^2y + y^2z, x^3z^4) \subset K[x, y, z]$,

   i) Descrivere le componenti irriducibili di $\mathbf{V}(I)$.

   ii) Trovare il radicale di $I$.

   **Soluzione**.

   i) Si ha che $\mathbf{V}(I)$ $=\mathbf{V}(x^2y + y^2z, x^3)\cup$ $\mathbf{V}(x^2y + y^2z, z^4)$ $=\mathbf{V}(y^2z, x)\cup$ $\mathbf{V}(x^2y, z)$ $=$ $(\mathbf{V}(y, x)\cup\mathbf{V}(z, x)) \cup (\mathbf{V}$ $(x, z)\cup$ $\mathbf{V}(y, z))$. Tutte le componenti trovate sono irriducibili, perche' tutti gli ideali sono primi. Tranne due componenti, (che sono uguali $\mathbf{V}(x, z)$) nessuna delle altre componenti contiene l'altra, quindi la decomposizione trovata e' la decomposizione irriducibile di $I$.

   ii) Il radicale di $I$ e' dato dall'intersezione degli ideali corrisponenti alle componenti irriducibili di $\mathbf{V}(I)$. Trattandosi di ideali monomiali si ha $\sqrt{I} = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z) = (xy, xz, yz)$

7. Sia $I$ l'ideale monomiale di $A = F_2[x, y, z]$ generato da $(x^4, y^2, z^3, xyz, x^3z^2)$. Determinare il numero di elementi di $A/I$.

   **Soluzione** Si ha che $dim_{F_2} A/I = 17$, quindi $A/I$ contiene $2^{17}$ elementi.

8. Sia $A$ un anello e sia $I \subset A$ un ideale. Provare che $I^e = I[x]$ e' primario se e solo se $I$ e' primario.

   **Soluzione** Sia $f : A \longrightarrow A[x]$. Se $I[x]$ e' primario e $ab \in I$, dato che da $f(ab) \in I$ si ha che $f(a) \in I$ o esiste $n$ tale che $(f(b))^n = f(b^n) \in I[x]$, da cui la tesi.

   Viceversa consideriamo $A[x]/I[x] \cong (A/I)[x]$ e sia $f \in A[x]/I[x]$ divisore di zero. Allora esiste $a \in A/I$ tale che $af = 0$ ossia tale che $aa_i = 0$ per ogni coefficiente $a_i$ di $f$. Quindi i coefficienti $a_i$ sono divisori di zero in $A/I$, e dato che $I$ e' primario questo implica che sono nilpotenti. Dato che tutti i coefficienti di $f$ sono nilpotenti $f$ e' nilpotente.

9. Sia $I \subset A$ un ideale. Se $\sqrt{I}$ e' massimale allora $I$ e' primario.

   **Soluzione** Consideriamo $A/I$ e proviamo che ogni divisore di zero e' nilpotente. Dato che $\sqrt{I}$ e' massimale, $A/I$ e' locale, quindi ogni elemento di $A/I$ o e' unita' o e' nilpotente, cosi' ogni divisore di zero e' nilpotente.

10. Sia $I \subset K[x_1, .., x_n]$ un ideale monomiale e $(m_1, .., m_k)$ una sua base minimale (ossia $m_i \not| m_j$ se $i \neq j$) provare che :

    i) $I$ e' primo se e solo se $\forall i \in \{1, .., k\}$ $\exists j_i \in \{1, .., n\}$ tale che $m_i = x_{j_i}$.

    ii) $I$ e' irriducibile se e solo se $\forall i \in \{1, .., k\}$ $\exists j_i \in \{1, .., n\}$ tale che $m_i = {x_{j_i}}^{\alpha_{j_i}}$. ($I$ e' irriducibile se $I = I_1 \cap I_2$ implica $I = I_1$ o $I = I_2$).

    iii) $I$ e' primario se e solo se esiste $s$ , $1 \leq s \leq k$ tale che $m_i = {x_{j_i}}^{\alpha_{j_i}}$ se $1 \leq i \leq s$ e $m_j \in K[x_{i_1}, .., x_{i_s}]$ se $s < i \leq k$

    **Soluzione**. (i) (i) Se $I = (x_{i_1}, .., x_{i_k})$, allora $k[x_1, .., x_n]/I$ e' un dominio quindi $I$ e' primo. Viceversa se $m_i = x_{j_i} n$ allora $n \notin I$ perche' la base e' minimale, quindi $x_{j_i} \in I$ e $n = 1$.

    (ii) Sia $I$ e' irriducible. se uno degli $m_i = nm$, $gcd(n, m) = 1$, allora $I \subset (I, n)$, $I \subset (I, m)$ e $(I, n) \cap (I, m) = I$, contro le ipotesi. Viceversa, supponiamo (eventualmente riordinando le variabili) che una base ridotta di $I$ sia della forma $(x_1^{\alpha_1}, ..x_k^{\alpha_k})$ e chiamiamo $X = (x_1, .., x_k)$ e $Y = (x_{k+1}, .., x_n)$. Siano $J, L$ ideali (non necessariamente monomiali) tali che $I = J \cap L$, proveremo che esiste $p(Y) \in k[Y]$ tale $x_1^{\alpha_1 - 1}..x_k^{\alpha_k - 1} p(y) \in I$, da cui l'assurdo.

    Siano $f \in J \setminus I$ e $g \in L \setminus I$ tali che $fg \in I$. Possiamo supporre che nessun monomio di $f$ o di $g$ sia in $I$, ma dalla condizione che $fg \in I$ segue che esistono $i$ e $j$ tali che $\deg_{x_i}(f) > 0$ e $\deg_{x_j}(g) > 0$.

    Consideriamo $f$ e scriviamolo come polinomio in $K[Y][x_1, .., x_k]$, $f = \sum_a c_a(Y) X^a$. Sia $\tilde{m}$ il monomio di grado minimo in $f$ e siano $\delta_i = \deg_{x_i} \tilde{m}$. Allora per ogni $i$, $\delta_i < \alpha_i$ e per ogni altro monomio $m$ in $f$ esiste almeno un $i$ tale che $\deg_{x_i} m > \delta_i$. Sia $\gamma = (\gamma_1, .., \gamma_k)$ dato da $\gamma_i = \alpha_i - \delta_i - 1$. Per costruzione $X^\gamma \tilde{m} = x_1^{\alpha_1 - 1}..x_k^{\alpha_k - 1}$ e inoltre $X^\gamma m \in I$ per gni altro monomio di $f$. Quindi se $c(Y)$ indica il coefficiente di $\tilde{m}$ in $f$, otteniamo $X^\gamma (f - c\tilde{m}) \in I \subset J$ da cui $c(Y) x_1^{\alpha_1 - 1}..x_k^{\alpha_k - 1} = X^\gamma f - X^\gamma (f - c\tilde{m}) \in J$. Nello stesso modo possiamo esprimere $d(Y) x_1^{\alpha_1 - 1}..x_k^{\alpha_k - 1} = X^\beta g - X^\beta (g - d\tilde{n}) \in K$ e quindi la tesi.

    iii) Supponiamo $I$ primario. Sia $m_i = x_k n$ dato che $n \notin I$ allora ${x_k}^\alpha \in I$.

    Viceversa. Eventualmente riordinando le variabili, supponiamo che tutti i monomi $m$ nella base di $I$ si appartengano a $K[x_1, .., x_s]$, $s \leq n$. Si ha $\sqrt{I} = (x_1, .., x_s)$, quindi $\sqrt{I}$ e' primo.

    Consideriamo l'immersione $\varphi : K[x_1, .., x_n] \longrightarrow K(x_{s+1}, .., x - n)[x_1, ..x_s]$. $\sqrt{\varphi(I)} = (x_1, ..x_s)$ e' massimale, quindi $\varphi(I)$ e' primario.

    Dato che $(\varphi(I))^c = I$, (hanno gli stessi generatori) si ha la tesi.

11. Provare se $\mathbb{R}[x, y]/(x^3, y)$ e $\mathbb{R}[x, y]/(x^2, y^2)$ sono isomorfi o no.

    **Soluzione**. $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[x, y]/(x^3, y) = 3$ mentre $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[x, y]/(x^2, y^2) = 4$, quindi non sono isomorfi.