Ass(M)

Sia A un anello e M un A-modulo; definiamo *primo associato* ad M un ideale primo $p \subset A$ tale che $\exists m \in M$ tale che $\mathrm{Ann}(m) = p$. Denotiamo l'insieme dei primi associati ad M con

$$\mathbf{Ass}(M) = \{\mathbf{p} \in \mathbf{Spec(A)} | \exists\, 0 \neq m \in M,\ \mathrm{Ann}(m) = \mathbf{p}\}$$

Esercizio 1. Sia $p \subset A$ un ideale primo. Si ha $\mathbf{p} \in \mathbf{Ass}(M)$ se e solo se M contiene un sottomodulo isomorfo a A/p.

Soluzione. Sia $\mathbf{p} = \mathrm{Ann}(m)$ e $f : A \longrightarrow M$, tale che $f(1) = m$. Allora $ker(f) = \mathrm{Ann}(m) = \mathbf{p}$ e passando al quoziente si ha la tesi.
Viceversa, supponiamo che esista $j : A/\mathbf{p} \longrightarrow M$ iniettiva. Sia $m = j([1])$ e $x \in \mathbf{p}$. Allora $xm = xj([1]) = j([x]) = 0$ da cui segue che $\mathbf{p} \subset \mathrm{Ann}(m)$.
Se invece $x \in \mathrm{Ann}(m)$ allora $xj([1]) = j([x]) = j([m]) = 0$ e per l'iniettività di j si deve avere $x \in \mathbf{p}$ perciò $\mathrm{Ann}(m) \subset \mathbf{p}$.

Esercizio 2. Sia $m \in M$ tale che $\mathrm{Ann}(m) = p$ primo, allora

$$0 \neq n \in < m > \Longrightarrow \mathrm{Ann}(n) = p$$

Soluzione Sia $n = am \neq 0$ con $a \in A$. Sia $x \in \mathrm{Ann}(n)$ allora $xn = axm = 0$ e $ax \in \mathrm{Ann}(m) = p$, dato che p è primo (e $a \notin p$ dato che $n \neq 0$) segue $b \in \mathrm{Ann}(m)$. L'altra inclusione è ovvia.

Esercizio 3. Gli elementi massimali dell'insieme

$$\Sigma = \{\mathrm{Ann}(m) \mid 0 \neq m \in M\}$$

sono ideali primi, e quindi appartengono ad $\mathbf{Ass}(M)$.
Soluzione Sia $m \in M$ tale che $p = \mathrm{Ann}(m)$ è massimale per Σ. Sia $ab \in p$, allora $abm = 0$. Se $bm = 0$ allora $b \in p$ altrimenti $a \in \mathrm{Ann}(bm) \supset \mathrm{Ann}(m)$. Per le ipotesi di massimalità si deve avere $\mathrm{Ann}(bm) = \mathrm{Ann}(m) = p$ e quindi $a \in p$.

Esercizio 4. Se A è noetheriano e $M \neq (0)$ allora $\mathbf{Ass}(M) \neq \emptyset$.
Soluzione Se A è noetheriano e $M \neq 0$, l'insieme

$$\Sigma = \{\mathrm{Ann}(m) \mid 0 \neq m \in M\}$$

che è non vuoto ha elementi massimali, che per l'esercizio precedente sono elementi di $\mathbf{Ass}(M)$.

Esercizio 4. Sia $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ una successione esatta di A-moduli. Allora

$$\mathbf{Ass}(N) \subseteq \mathbf{Ass}(M) \subseteq \mathbf{Ass}(N) \cup \mathbf{Ass}(P)$$

Soluzione Sia $p \in \mathbf{Ass}(N)$ allora esiste $j : A/p \longrightarrow N$ iniettiva. Dato che $(f \circ j) : A/p \longrightarrow M$ è ancora iniettiva $p \in \mathbf{Ass}(M)$.
Se $p \in \mathbf{Ass}(M)$, allora esiste $j : A/p \longrightarrow M$ iniettiva. Ci sono due casi: $j(A/\mathbf{p}) \cap kerg = Imf = (0)$, allora $g \circ j : A/p \longrightarrow P$ rimane iniettiva e $p \in \mathbf{Ass}(P)$.
Se invece $j(A/p) \cap Imf \neq (0)$ allora esiste $0 \neq m$, $m \in Im(f) \cap j(A/p)$. Sia $m = f(n) = j([x])$ con $x \notin p$, allora $p = \mathrm{Ann}(j([x]))$ e per l'iniettività di f, $\mathbf{Ann}(n) = \mathrm{Ann}(f(n)) = \mathrm{Ann}(m) = \mathrm{Ann}(j([x])) = p$ e quindi $p \in \mathbf{Ass}(N)$.