0.1 Risultante

Sia R un dominio di integrità e siano $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ polinomi in $R[x]$.
Definiamo matrice di Sylvester di f e g, la matrice $(m+n)\times(m+n)$ data da:

$$\mathrm{Syl}(f,g) = \begin{pmatrix} a_m & \cdots & a_0 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_m & & \cdots & a_0 \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & b_n & & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

Definiamo il risultante di f, g come $\mathrm{Ris}(f,g) = \det(Syl(f,g))$.
Proposizione Siano $f, g \in R[x]$ e $a, b \in R$. Allora:

1. $\mathrm{Ris}(f,g) = (-1)^{mn}\mathrm{Ris}(g,f)$
2. $\mathrm{Ris}(af,g) = a^n\mathrm{Ris}(f,g)$ e $\mathrm{Ris}(f,bg) = b^m\mathrm{Ris}(f,g)$
3. $\mathrm{Ris}(a,b) =_{def} 1$

Dimostrazione I risultati discendono dalle proprietà di multilinearità del determinante.
Siano $y = (y_1, \cdots y_m)$ indeterminate, definiamo il polinomio:

$$f_m(x,y) = \prod_{i=1}^{m}(x - y_i) = \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} x^i, \quad \text{per} \quad m > 0$$

I coefficienti di f_m sono le funzioni simmetriche elementari nelle variabili $y_1, \cdots y_m$.

1. $a_m^{(m)} = 1$
2. $a_{m-1}^{(m)} = -(y_1 + \cdots + y_m)$
3. $a_{m-2}^{(m)} = y_1y_2 + \cdots + y_{m-1}y_m$

$\vdots$

4. $a_0^{(m)} = (-1)^m y_1 y_2 \cdots y_m$

Notiamo che i coefficienti $a_i^{(m)}$sono funzioni lineari in ogni variabile y_j; inoltre, scrivendo $f_m(x,y) = f_{m-1}(x,y)(x - y_m)$ si ottiene che

$$a_{i-1}^{(m-1)}(y_1, \cdots, y_{m-1}) - y_m a_i^{(m-1)}(y_1, \cdots, y_{m-1}) = a_i^{(m)}(y_1, \cdots, y_{m-1}, y_m)$$

Valutando per $y_m = 0$, si ottiene:

$$a_{i-1}^{(m-1)}(y_1, \cdots, y_{m-1}) = a_i^{(m)}(y_1, \cdots, y_{m-1}, 0)$$

Dimostriamo ora il teorema fondamentale sul risultante, che lo caratterizza in termini delle radici dei polinomi.

Teorema Sia R un dominio, $g \in R[x]$ un polinomio di grado $n > 0$, sia $m > 0$ e consideriamo f_m (e g) come polinomio in $R[y_1, .., y_m][x]$. Allora:

$$\mathrm{Ris}_x(f_m(x, y), g(x)) = g(y_m)\mathrm{Ris}_x(f_{m-1}(x, y), g(x)) \in R[y_1, .., y_m]$$

Dimostrazione Sia $g = b_n x^n + \cdots + b_0$. La matrice di Sylvester in questo caso :

$$\mathrm{Syl}(f_m, g) = \begin{pmatrix} a_m^{(m)} & \cdots & a_0^{(m)} & & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_m^{(m)} & & \cdots & a_0^{(m)} \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & b_n & & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

Indichiamo con C_i la i-esima colonna di $\mathrm{Syl}(f_m, g)$. Se moltiplichiamo ogni colonna C_i per y_m^{m+n-i} e sommiamo i risultati all'ultima colonna, otteniamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} a_m^{(m)} & \cdots & a_0^{(m)} & & & y_m^{n-1} f_m(y_m) \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & a_m^{(m)} & & \cdots & f_m(y_m) \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & y_m^{m-1} g(y_m) \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & b_n & & \cdots & g(y_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m^{(m)} & \cdots & a_0^{(m)} & & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & a_m^{(m)} & & \cdots & 0 \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & y_m^{m-1} g(y_m) \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & b_n & & \cdots & g(y_m) \end{pmatrix}$$

Dato che per definizione, $f_m(y_m) = 0$.

Inoltre, per le proprietà del determinante, si ha che

$$\mathrm{Ris}(f_m, g) = \det \begin{pmatrix} a_m^{(m)} & \cdots & a_0^{(m)} & & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & a_m^{(m)} & & \cdots & 0 \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & y_m^{m-1} g(y_m) \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & b_n & & \cdots & g(y_m) \end{pmatrix} =$$

$$g(y_m)\det\begin{pmatrix} a_m^{(m)} & \cdots & a_0^{(m)} & & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & a_m^{(m)} & & \cdots & 0 \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & y_m^{m-1} \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & b_n & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto osserviamo che $\deg_{y_m} \operatorname{Ris}(f_m, g) = \deg_{y_m} g(y_m) = n$. Di conseguenza, dato che R è un dominio, il grado in y_m di

$$\det\begin{pmatrix} a_m^{(m)} & \cdots & a_0^{(m)} & & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & a_m^{(m)} & & \cdots & 0 \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & y_m^{m-1} \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & b_n & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

deve essere 0, dunque possiamo valutarlo in $y_m = 0$ senza influire sul valore del risultato; ricordando le relazioni sui coefficienti, otteniamo,

$$\det\begin{pmatrix} a_m^{(m)} & \cdots & a_0^{(m)} & & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & a_m^{(m)} & & \cdots & 0 \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & y_m^{m-1} \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & b_n & & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{m-1}^{(m-1)} & \cdots & a_0^{(m-1)} & & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & a_{m-1}^{(m-1)} & & \cdots & 0 \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & \vdots \\ & \ddots & & & \ddots & 0 \\ & & b_n & & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$\operatorname{Ris}(f_{m-1}, g)$

Corollario Siano R un dominio e $f, g \in R[x]$, di gradi $m, n > 0$:

(1) $\operatorname{Ris}(f, g) = 0 \iff \exists \alpha \in \overline{R}$ *t.c.* $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$

(2) $\operatorname{Ris}(f, g) = 0 \iff f$ e g hanno un fattore comune $h(x) \in R[x]$ di grado positivo.

(3) Sia a_m il coefficiente direttore di f e siano $\alpha_1, .., \alpha_m \in \overline{R}$ le radici di f. $\operatorname{Ris}(f, g) = {a_m}^n \prod_i g(\alpha_i)$

1. Sia b_n il coefficiente direttore di g e siano $\beta_1, .., \beta_n \in \overline{R}$ le radici di g. $\operatorname{Ris}(f, g) = (-1)^{mn} {b_n}^m \prod_j f(\beta_j)$
2. $\operatorname{Ris}(f, g) = {a_m}^n {b_n}^m \prod_{ij} (\alpha_i - \beta_j)$

Corollario Sia R un dominio, $f, h, g, h_1, h_2 \in R[x]$.

(1) $\mathrm{Ris}(f, h_1 h_2) = \mathrm{Ris}(f, h_1)\mathrm{Ris}(f, h_2)$

(2) $\mathrm{Ris}(f, hf + g) = a_n^{N - \deg g}\mathrm{Ris}(f, g)$, dove $N = \deg hf + g$

Dimostrazione

(1) Sia a_m il coefficiente direttore di f e siano $\alpha_i \in \overline{R}$ le sue radici. Sia $n = \deg h_1 + \deg h_2$. $\mathrm{Ris}(f, h_1 h_2) = a_m^n \prod_{i=1}^m h_1(\alpha_i) h_2(\alpha_i) =$ $\left(a_m^{\deg h_1} \prod_{i=1}^m h_1(\alpha_i)\right) \left(a_m^{\deg h_2} \prod_{i=1}^m h_2(\alpha_i)\right) = \mathrm{Ris}(f, h_1)\mathrm{Ris}(f, h_2)$

(2) $\mathrm{Ris}(f, hf + g) = a_m^N \prod_{i=1}^n (hf + g)(\alpha_i) =$ $a_m^N \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = a_m^{N - \deg(g)}\mathrm{Ris}(f, g)$

Esercizio Siano $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, di grado positivo e f di grado $m > 0$. Provare che se $f(0) = 1$ allora per ogni $k = 2h$, $\mathrm{Ris}(f, x^k g) = \mathrm{Ris}(f, g)$.
Dimostrazione Per la proposizione precedente si ha

$$\mathrm{Ris}(f, x^k g) = \mathrm{Ris}(f, g)\mathrm{Ris}(f, x^k) = \mathrm{Ris}(f, g) \prod_1^k \mathrm{Ris}(f, x).$$

Ma $\mathrm{Ris}(f, x) = (-1)^m f(0)$ e quindi $\mathrm{Ris}(f, x^k g) = (-1)^{mk} f(0)\mathrm{Ris}(f, g) = \mathrm{Ris}(f, g)$.
Proposizione Siano $f, g \in R[x]$, allora esistono polinomi $A, B \in R[x]$ con $\deg A < \deg g$ *e* $\deg B < \deg f$, tali che:

$$\mathrm{Ris}(f, g) = Af + Bg$$

Dimostrazione Come nella dimostrazione del teorema precedente, possiamo agire sulla matrice di Sylvester con trasformazioni elementari, arrivando alla matrice:

$$\begin{pmatrix} a_m & \cdots & a_0 & & & x^{n-1}f(x) \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & a_m & & \cdots & f(x) \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & x^{m-1}g(x) \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & b_n & & \cdots & g(x) \end{pmatrix}$$

Per ottenere la tesi, basta allora sviluppare il determinante rispetto all'ultima colonna e notare che f risulta moltiplicato per un polinomio di grado al più $n - 1$ e g per un polinomio di grado al pù $m - 1$.
Esercizio Siano R un dominio e $f, g \in R[x]$ di gradi $m > 0$ e $n > 0$ rispettivamente. Se $\alpha_1, ...\alpha_m$ e $\beta_1, ..\beta_n$ sono le radici di f e g in $\overline{R}$ allora:

1. il polinomio $r(x) = \mathrm{Ris}_y(f(x-y), g(y))$ ha radici $\gamma_{ij} = \alpha_i + \beta_j$
2. il polinomio $r(x) = \mathrm{Ris}_y(f(x+y), g(y))$ ha radici $\gamma_{ij} = \alpha_i - \beta_j$
3. il polinomio $r(x) = \mathrm{Ris}_y(y^m f(\frac{x}{y}), g(y))$ ha radici $\gamma_{ij} = \alpha_i\beta_j$
4. Se $g(0) \neq 0$ il polinomio $r(x) = \mathrm{Ris}_y(f(xy), g(y))$ ha radici $\gamma_{ij} = \frac{\alpha_i}{\beta_j}$

Dimostrazione Ognuno dei punti segue immediatamente dalla relazione $\mathrm{Ris}(f,g) = (-1)^{mn}{b_n}^m \prod_j f(\beta_j)$.

1. $\mathrm{Ris}_y(f(x-y), g(y)) = (-1)^{mn}{b_n}^m \prod_j f(x-\beta_j) =$
   $(-1)^{mn}{a_m}^n{b_n}^m \prod_{ij}(x - (\alpha_i + \beta_j))$
2. $\mathrm{Ris}_y(f(x+y), g(y)) = (-1)^{mn}{b_n}^m \prod_j f(x+\beta_j) =$
   $(-1)^{mn}{a_m}^n{b_n}^m \prod_{ij}(x - (\alpha_i - \beta_j))$
3. $\mathrm{Ris}_y(y^m f(\frac{x}{y}), g(y)) = (-1)^{mn}{b_n}^m \prod_j {\beta_j}^m f(\frac{x}{\beta_j}) =$
   $(-1)^{mn}{a_m}^n{b_n}^m \prod_{ij}(x - (\alpha_i\beta_j))$
4. $\mathrm{Ris}_y(y^m f(xy), g(y)) = (-1)^{mn}{b_n}^m \prod_j f(x\beta_j) =$
   $(-1)^{mn}{a_m}^n{b_n}^m \prod_{ij}(x\beta_j - \alpha_i) = (-1)^{mn}{a_m}^n \prod_i b_n(\prod_j \beta_j) \prod_j (x - \frac{\alpha_i}{\beta_j}) =$
   $(-1)^{mn}{a_m}^n{b_0}^m \prod_i \prod_j (x - \frac{\alpha_i}{\beta_j})$ se $b_0 = g(0) \neq 0$

Esercizio Sia $\varphi\colon R[x] \to R[x]$ un omomorfismo di R-algebre e siano $f, g \in R[x]$ due polinomi tali che $\deg(f) = \deg(\varphi(f))$ e $\deg(g) = \deg(\varphi(g))$. Allora si ha $\varphi(\mathrm{Ris}(f,g)) = \mathrm{Ris}(\varphi(f), \varphi(g))$