

Esercizi
Programma I Verifica
AA 2012- 2013

Esercizio 1. Date le funzioni $f(x) = \arcsen x$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = \sqrt{x}$ scrivere le funzioni composte $F_1 = h \circ f \circ g$ e $F_2 = g \circ h \circ f$ determinandone il campo di esistenza e l'immagine. F_1 e F_2 sono invertibili? Perché?

Esercizio 2. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = (x+3)e^{x-1}$$

è invertibile per $x \in (-4, +\infty)$ e detta $x = g(y)$ la sua funzione inversa, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $g(y)$ per $y = 4$.

Esercizio 3. Data la funzione $f(t) = 8 - 7\cos(\pi + 2t)$, determinarne l'ampiezza e il periodo e disegnarne il grafico.

Esercizio 4. Data la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{16-2^x}}{\log(x^3-1)}$, studiarne il dominio di definizione e determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) < 0$.

Esercizio 5. Descrivere il dominio di definizione delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \log(x^{1/3} + x^{4/3})$

b) $g(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x - 6}$

Esercizio 6. Una funzione f definita $\forall x \in \mathbb{R}$ soddisfa le seguenti proprietà

i) f è crescente; ii) f è concava; iii) $f(5) = 2$; iv) $f'(5) = \frac{1}{2}$.

1) Disegnare un possibile grafico per f .

2) Per quanti $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0$? Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che gli zeri di f sono contenuti in $[a, b]$

3) È possibile che $f'(1) = \frac{1}{4}$?

Giustificare le risposte.

Esercizio 7. Sia $f(x) = 2 + x^2 + \log(2x + 2)$

- Determinare il dominio di definizione
- Su quali intervalli la funzione e' crescente?
- Su quali intervalli e' concava?
- Trovare le coordinate di massimi e minimi locali.
- Disegnare il grafico di f .

Esercizio 8. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{x-3}}{6} & x \geq 3 \\ \frac{5x}{x^2+1} + a(x-3) & x < 3 \end{cases}$$

e' continua e per quali e' derivabile in \mathbb{R} .

Esercizio 9. Sia $f(x) = 1 - x^2 - \log(6 - 2x)$

- Determinare il dominio di definizione
- Su quali intervalli la funzione e' crescente?
- Su quali intervalli e' concava?
- Trovare le coordinate di massimi e minimi locali.
- Disegnare il grafico di f .

Esercizio 10. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{x-6}}{60} & x \geq 6 \\ \frac{4x}{x^2+4} + a(x-6) & x < 6 \end{cases}$$

e' continua e per quali e' derivabile in \mathbb{R} .

Esercizio 11. Sia $f(x) = x e^{\frac{1}{1+\log x}}$

- Determinare il dominio di definizione
- Su quali intervalli la funzione e' crescente?
- Su quali intervalli e' concava?
- Trovare le coordinate di massimi e minimi locali.
- Se esistono asintoti, determinarli.
- Disegnare il grafico di f .

g) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 12. Trovare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione $f(x)=\log(1+x)-\arctg(\sqrt{x})$ nell'intervallo $[0,1]$

Esercizio 13. Date le funzioni :

i) $f(x)=\frac{2e^{2x}}{1+e^{-2x}}$,

ii) $g(x)=1+\arctg(\log(1+3x))$,

iii) $h(x)=\text{sen}(kx)+\arcsen(kx)$,

a) Provare che le tangenti ai grafici di f e g in $x=0$ sono parallele,

b) Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le tangenti ai grafici f e h in $x=0$ sono perpendicolari.

Esercizio 14. Data la funzione $f(x)=6e^{-x}+2\log(e^x-1)-x$, determinare:

a) il dominio di definizione.

b) Se esistono, gli asintoti

c) i punti di minimo, massimo e flesso

d) disegnare il grafico di f .

Esercizio 15. Sia $f(x)=\log(x^2-x^3)$

a. Determinare il dominio di definizione

b. Su quali intervalli la funzione e' crescente?

c. Su quali intervalli e' concava?

d. Disegnare il grafico di $f(x)$.

Esercizio 16. Trovare una funzione f derivabile su tutto \mathbb{R} , tale che $f(1)=-1$, $f(4)=7$ e $f'(x)>3$ per ogni x o dire perche' non esiste. (Giustificare le risposte).

Esercizio 17. Determinare il dominio di definizione e il segno della funzione $f(x)=\arcsen(\log(x^2-1))$.

Esercizio 18. Determinare tutti i punti sulla curva $y=\arcsen(x)$ dove la

retta tangente e' parallela alla retta $y=2x+9$.

Esercizio 19. Trovare dominio di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = e^{\frac{1-x}{x}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} .$$

Esercizio 20. Risolvere in campo complesso l'equazione:

$$(z^2 - |\bar{z}^2 - i|)(5z^6 + 10) = 0 .$$

Esercizio 21. Risolvere in campo complesso l'equazione:

$$(2z^2 - i(\operatorname{Im} z)^2 - |z|)(z^5 - \frac{3}{(1+i)^2}) .$$

Esercizio 22. Trovare le radici $\alpha \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^8 - (1+2i)z^4 - \frac{1}{2}(1+i) + i \frac{3+2i}{1+i} = 0 .$$

(Si consiglia di semplificare il termine noto).

Esercizio 23. Trovare le radici $\alpha \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^5 + 2(1+i)\bar{z})(z^2 - 2\bar{z} + 3) = 0 .$$

Esercizio 24. Risolvere a scelta uno dei seguenti esercizi:

a) Data la funzione $g(t) = 4 - 5\operatorname{sen}(\frac{t}{\pi})$, determinarne l'ampiezza, il periodo e disegnarne il grafico.

b) Determinare le soluzioni dell'equazione $x^2 + 2x + 1 = |x^3 + 1|$.

Esercizio 25. Sia $p(x) = x^3 + ax + 3$, $a \in \mathbb{R}$. Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che:

- i) p sia riducibile su \mathbb{Z} ;
- ii) p sia riducibile su \mathbb{R} .