Compito 5/6/11. - Istituzioni di Matematica ①

Traccia delle dimostrazioni

1. a) la funzione è definita per $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

b) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

quindi si hanno due asintoti verticali.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$.

Dato che l'esponenziale è continua consideriamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - \log\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\right]$$

$$= 2$$

quindi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^2$ e si hanno due asintoti orizzontali

c) $Df(x) = D\left(e^{x\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}\right) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \cdot \left[\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{2x}{x^2-1}\right]$.

2). Posto $z = a+ib$ si ha $|z^2+1| = \sqrt{(a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2}$

da cui

$$|z^2+1| + z^2 - z = \sqrt{(a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2} + a^2-b^2+\underline{2abi} - a - \underline{ib} = 0$$

uguagliando a zero la parte reale e la parte immaginaria si ottengono i due sistemi:

$$\begin{cases} b = 0 \\ \sqrt{(a^2+1)^2} + a^2 - a = \end{cases}$$

$2a^2 - a + 1 = 0$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\left(\frac{5}{4}-b^2\right)^2+b^2} = b^2+\frac{1}{4} \end{cases}$$

Dato che $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

da cui le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad , \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

b) vale $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\vartheta_1 = \frac{\pi}{3} \qquad \vartheta_2 = -\frac{\pi}{3}$ quindi

$z_1 = e^{\frac{\pi}{3} i} \qquad z_2 = e^{-\frac{\pi}{3} i}$

3). Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli con esponente $\alpha = -1$

Effettuando la sostituzione $z = y^2$, $z' = 2yy'$ si ottiene:

$z' = \frac{2z}{x} - 2$ da cui $z = x^2 \left(\frac{2}{x} + c \right)$

quindi $y(x) = \pm \sqrt{2x + cx^2}$

se $y(1) = 9 = \sqrt{2 + c} \qquad c = 79$

4).

a) La matrice del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

; gli autovalori di A sono

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ e i relativi autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

quindi le soluzioni sono:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} e^{3x}$$

b) Il polinomio caratteristico della matrice è $p(t) = -t(t^2 - t + 4 - a)$.

Le radici sono:

$t_1 = 0 \qquad t_2 = \dfrac{1 + \sqrt{4a-15}}{2} \qquad t_3 = \dfrac{1 - \sqrt{4a-15}}{2}$

affinché siano reali si deve avere $\Delta \geq 0 \iff a \geq \frac{15}{4}$

Inoltre se $a \neq \frac{15}{4}$ e $a \neq 4$ le radici sono distinte quindi per $a > \frac{15}{4}$ e $a \neq 4$ la matrice è diagonalizzabile.

Per $a = \frac{15}{4}$ si hanno gli autovalori

$t_1 = 0 \qquad t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$

Dato che $\text{rango}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 4 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2$ la matrice non è diagonalizzabile per $a = \frac{15}{4}$

per $a = 4$ si ha $t_1 = t_2 = 0 \quad t_3 = 1$

dato che $\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 2$ la matrice non è diagonalizzabile per $a = 4$

Quindi A è diagonalizzabile $\forall a > \frac{15}{4}, a \neq 4$

—

Se $a = 6$ il polinomio caratteristico è $p(t) = -t(t^2 - t - 2)$ e quindi gli autovalori sono $t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad t_3 = -1$

e gli autovettori associati

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.