Istituzioni di Matematica I
1 Luglio 2011
Traccia delle soluzioni

Esercizio 1. Date le funzioni $f(x)=arcsen(x)$ e $g(x)=(\frac{x-1}{x+1})$

a. Determinare il dominio di definizione e l'immagine di $h=f\circ g$;

b. Calcolare massimi , minimi e flessi di *h;*

c. Provare che *h* e' invertibile e calcolare $D(h^{-1})(\frac{\pi}{6})$.

Soluzione.

a. La funzione e' definita per $-1<(\frac{x-1}{x+1})\leq 1$ ossia per $x\geq 0$. Dato che $h(0)=-\frac{\pi}{2}$ e $lim_{x\to\infty} h(x)=\frac{\pi}{2}$ si ha che Im(*h*) = [$\frac{-\pi}{2,}\frac{\pi}{2}$).

b. $D(h)=\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$. La funzione e' derivabile per ogni $x>0$ e la derivata e' sempre positiva, cosi' la funzione e' crescente e ha un minimo assoluto in $x=0$, non ha massimo. $D^{(2)}(h)=\frac{-1-3\mathrm{x}}{x\sqrt{x}(x+1)^2}$ e' sempre minore di zero quindi non ci sono flessi.

c. Dato che la funzione e' crescente, e' invertibile sul suo dominio di definizione e si ha $D(h^{-1})(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{Dh(3)}=4\sqrt{3}$.

Esercizio 2. Dati i numeri complessi $\alpha=\sqrt{3}-i$ e $\beta=\frac{2+i}{2i-1}+1$:

a) esprimerli in forma trigonometrica o esponenziale

b) risolvere l'equazione $\alpha z^4=\beta$.

Soluzione. $\alpha=2e^{\frac{-\pi}{6}}$ e $\beta=1-i=\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}}$.

Posto $z=re^{it}$ si ha $r^4e^{i4t}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$, da cui $z=2^{-\frac{1}{8}}e^{(-\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{2})i}$ con $0\leq k<12$.

Esercizio 3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'\,sen(x)+y(\cos(x)-sen(x))-x=0 \\ y(-1)=0 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine.
Le soluzioni sono della forma $y=e^{A(x)}\int e^{-A(x)}b(x)\,dx$ dove $A'(x)=\frac{-\cos(x)}{sen(x)}+1$ e quindi $A(x)=-\log(sen(x))+x$ e $b(x)=\frac{x}{sen(x)}$. Si ottiene cosi' $y=\frac{-x-1+c\,e^{x}}{sen(x)}$.
Imponendo la condizione iniziale si ha $c=0$ e la soluzione del problema di Cauchy e' $y=\frac{-x+1}{sen(x)}$.

Esercizio 4. Dato il sistema :

$$\begin{cases} x+2y+z=a \\ 2x+y+3z=b \\ 6x+6y+8z=c \end{cases}$$

a) determinareper quali valori di $a,b,c\in\mathbb{R}$ non esistono soluzioni;
b) posto $a=1, b=0, c=2$ trovare le soluzioni.

Soluzione. a. Riducendo a scalini la matrice completa del sistema si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2a-b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-2b \end{pmatrix}$$

e cosi' il sistema non ha soluzione se $c-2a-2b\neq 0$.

b. Posto $a=1, b=0, c=2$ nella matrice ridotta si ottiene immediatamente che le soluzioni sono $X=(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)+t(-5,1,3)$ per $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Calcolare $\int_1^e t^3 \log(t^2)\, dt$.

Soluzione. Integrando per parti si ottiene:

$$\int_1^e t^3 \log(t^2)\, dt = \left[\frac{1}{2} t^4 \log(t)\right]_1^e - \left[\frac{1}{8} t^4\right]_1^e = \frac{3e^4+1}{8} \ .$$