Istituzioni di Matematica I
13 Settembre 2011
Traccia delle soluzioni

Esercizio 1. Data $A_k=\begin{pmatrix} k^2 & 2(1+k) & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ (1+k) & (2+k) & 1 \end{pmatrix}$, con $k\in\mathbb{R}$

a. Calcolare il determinante di A_k
b. Determinare il rango di A_k al variare di $k\in\mathbb{R}$
c. Discutere il numero di soluzioni al variare di $k\in\mathbb{R}$ del sistema

$$A_k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+k \\ 2 \\ -2\mathrm{k} \end{pmatrix}$$

Soluzione.

a. Sviluppando rispetto alla seconda riga si ottiene:

$$det(A)=k^2+k(k^2(2+k)-2(1+k)^2)=k(k+1)^2(k-2)$$

b. Dal punto precedente si ottiene che il rango e' 3 per $k\neq-1,0,2$ e il rango e' 2 per $k=-1,0,2$, dato che per ognuno di questi valori esiste un minore di ordine 2 con determinante diverso da zero.

c. Dai punti precedenti si ottiene che il sistema ha una sola soluzione per $k\neq-1,0,2$.
Sostituendo $k=-1,0$ si ha che il rango della matrice completa del sistema e' ancora 2, quindi esiste una infinita' di soluzioni.
Invece per $k=2$ non esistono soluzioni dato che il rango della matrice completa e' 3.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x)=1+x\log^2(x)$ **:**
a. determinarne il dominio di definizione.
b. Calcolare eventuali massimi e minimi.
c. Discutere il numero di soluzioni dell'equazione a $1+x\log^2(x)=k$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

a. La funzione e' definita per $x>0$ **.**

b. Si ha $f'(x)=\log(x)(\log(x)+2)$ quindi la derivata si annulla per $x=1$ e $x=\frac{1}{e^2}$ e' negativa per $x \in (\frac{1}{e^2},1)$ e positiva altrove.

Dato che $lim_{x\to 0} f(x)=1$ e $lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ e $f(1)=1$ $f(\frac{1}{e^2})=1+\frac{4}{e^2}$, $x=1$ e' un minimo assoluto e $x=\frac{1}{e^2}$ un massimo relativo.

c. Per le considerazioni fatte nel punto precedente si ottiene che :

- se $k<1$ non ci sono soluzioni
- se $k=1$ o $k>1+\frac{4}{e^2}$ esiste una sola soluzione
- se $k \in (1,1+\frac{4}{e^2})$ esistono 3 soluzioni
- se $k=1+\frac{4}{e^2}$ esistono due soluzioni

Esercizio 3. Risolvere a scelta uno dei seguenti esercizi:

a. Calcolare autovalori e autovettori della matrice: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice e' diagonalizzabile?

b. Calcolare $\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}$. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi trovati e rappresentarli graficamente nel piano complesso.

Soluzione. a. Gli autovalori della matrice sono 0 (con molteplicita' 2) e 1 . Gli autovettori relativi all'autovalori 0 sono della forma $v_t=t(-1,10,9)$ mentre quelli relativi all'autovalore 1 sono $w_t=t(0,1,1)$ (per $t \in \mathbb{R}$).

Dato che $rango(A)=2$ la molteplicita' geometrica dell'autovalore 0 e' 1 e quindi la matrice non e' diagonalizzabile.

b. Si ha $-8-8i\sqrt{3}=16(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=16(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\,sen(\frac{4\pi}{3}))$.

Da cui le radici sono $z_k=2(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{4})+i\,sen(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{4}))$ con $k=0,1,2,3$. Sostituendo i valori di *k* e valutando si ottiene:

$z_0=1+i\sqrt{3}\quad z_1=-\sqrt{3}+i\quad z_2=-1-i\sqrt{3}\quad z_3=\sqrt{3}-i$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'=\frac{2(y^2+1)}{x^2-1} \\ y(0)=0 \end{cases}$.

Soluzione. L'equazione $y'=\frac{2(y^2+1)}{x^2-1}$ e' a variabile separabili e ha soluzioni $y=tg(\log(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|)+c)$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene $y=tg(\log(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|))$.