Istituzioni di Matematica I
Chimica STCIA
15 Dicembre 2011
Correzione

Esercizio 1. Calcolare $\int \frac{dx}{x+2+2\sqrt{x+1}}$.

Soluzione. Effettuando la sostituzione $t=\sqrt{x+1}$ l'integrale diviene
$\int \frac{2t}{(t+1)^2}\,dt=2\log|t+1|+\frac{2}{t+1}+c$ da cui
$\int \frac{dx}{x+2+2\sqrt{x+1}}=\log(x+2+2\sqrt{x+1})+\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}+c$ **.**

Esercizio 2. Dimostrare che la funzione $f(x)=\frac{1}{x+1}e^{\frac{x^2}{x+1}}$.

e' invertibile per $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ e detta $x=g(y)$ la sua funzione inversa, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $g(y)$ per $y=1$.

Soluzione. La funzione e' continua e derivabile in $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Si ha
$f'(x)=\frac{x^2+x-1}{(x+1)^3}e^{\frac{x^2}{(x+1)}}$. Dato che $f'(x)<0$ in $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ la funzione e' invertibile. L'equazione della retta tangente al grafico di $g(y)$ per $y=1$ e' data da $x=g(1)+g'(1)(y-1)$. Poiche' $f(0)=1$ si ha $g(1)=0$ e $g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=-1$ e quindi si ottiene la retta $x=1-y$.

Esercizio 3. Determinare per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x+2ky+z=0 \\ 3x+2z=0 \\ 4x-6y-kz=0 \end{cases}$$

ha soluzioni non banali.

Soluzione. Il determinante della matrice dei coefficienti e' uguale a $6\mathrm{k}^2+16\mathrm{k}-6=2(k+3)(3\mathrm{k}-1)$ quindi il sistema ha soluzioni non banali per $k=-3$ e $k=\frac{1}{3}$.

Esercizio 4. Trovare le radici $\alpha\in\mathbb{C}$ dell'equazione $|z^2+i|z=|z^2|$.

Soluzione. Osservando che $|z^2|=z\bar{z}$ si puo' riscrivere l'equazione come $z(|z^2+i|-\bar{z})=0$ da cui si ottiene che $z=0$ e' soluzione. Inoltre da $|z^2+i|-\bar{z}=0$ segue immediatamente che, posto $z=a+ib$, deve essere $b=0$ e $\sqrt{a^4+1}-a=0$. Dato che quest'ultima equazione non ha soluzioni reali, la sola soluzione dell'equazione data e' $z=0$.

Esercizio 5. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases}(1+x^2)y'-xy=x(1+x^2)\\ y(0)=3\end{cases}$$

Soluzione. Riscrivendo l'equazione come $y'=\frac{x}{1+x^2}y+x$ otteniamo che le soluzioni sono date da $y=\sqrt{1+x^2}\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+c)$.
La soluzione cercata si ottiene quindi per $c=2$.