**Istituzioni di Matematica - CIA**
**16 Luglio 2013**
**Correzione**

**Esercizio 1.** Sia $f(x) = (9 - x^2)\log(9 - x^2)$:

a) Determinare il dominio di definizione di $f$. Provare che la funzione è estendibile con continuità agli estremi del dominio di definizione. Sia $\hat{f}$ questa estensione.

b) Su quali intervalli la funzione $\hat{f}$ e' crescente? Trovare le coordinate dei suoi eventuali massimi, minimi.

c) Provare che esistono due punti di flesso per $\hat{f}$ .

d) Disegnare il grafico di $\hat{f}$.

e) Trovare il numero di soluzioni dell'equazione $\hat{f}(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

**Soluzione** a) La funzione è definita per $-3 < x < 3$. Dato che $\lim_{x\to\pm 3} f(x) = 0$ allora $f$ si può estendere a una una funzione $\hat{f}$,definita su $[-3, 3]$, ponendo $\hat{f}(x) = f(x)$ per $x \in (-3, 3)$ e $\hat{f}(\pm 3) = 0$.
La funzione $\hat{f}$ è simmetrica rispetto all'asse $y$ e incontra l'asse $x$ nei punti $x = \pm 3$ e $x = \pm 2\sqrt{2}$. ponendo $\hat{f}(x) = f(x)$ per $x \in (-3, 3)$ e $\hat{f}(\pm 3) = 0$.
b) Si ha $\hat{f}'(x) = -2x(1 + \log(9 - x^2))$, quindi la funzione $\hat{f}$ e' derivabile su $(-3, 3)$ e crescente su $[-\sqrt{\frac{9e-1}{e}}, 0]$ e $[\sqrt{\frac{9e-1}{e}}, 3]$. $(0, \hat{f}(0) = 18\log(3))$ è punto di massimo assoluto, mentre $(\pm\sqrt{\frac{9e-1}{e}}, -\frac{1}{e})$ sono punti di minimo as-

soluto. Inoltre la funzione $\hat{f}$ ha due punti di massimo relativo per $x = \pm 3$ dove $\hat{f}$ vale 0.
c) Dato che $\hat{f}'(0) = \hat{f}'(\sqrt{\frac{9e-1}{e}}) = 0$ e la funzione e' derivabile su $(0, \sqrt{\frac{9e-1}{e}})$ per il teorema di Rolle esiste uno zero della derivata seconda in $(0, \sqrt{\frac{9e-1}{e}})$ (e quindi per simmetria anche in $(-\sqrt{\frac{9e-1}{e}}, 0)$).
e) Dal punto precedente si ottiene:

se $k < -\frac{1}{e}$ o $k > 18log(3)$ non ci sono soluzioni;

se $k = -\frac{1}{e}$ o $0 < k, 18log(3)$ ci sono 2 soluzioni;

se $-\frac{1}{e} < k \leq 0$ ci sono 4 soluzioni;

**Esercizio 2.** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) $A$ è diagonalizzabile ? (Giustificare la risposta).

b) Calcolare gli autovettori associati all'autovalore 0.

c) Trovare $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tale che il sistema $AX = B$ non abbia soluzioni.

**Soluzioni** a) Il polinomio caratteristico di $A$ è $p_A(t) = -t(t^2 - 4t - 13)$ quindi la matrice ha tre autovalori reali e distinti da cui segue che è diagonalizzabile.
b) gli autovettori relativi all'autovalore 0 sono le soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$ ossia tutti vettori della forma $v = \alpha(3, 1, -5) \in \mathbb{R}^3$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Dato che la matrice ha rango 2 (vedi punto b) basta trovare un vettore $B$ tale che la matrice $(A|B)$ abbia rango 3, ad esempio $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

**Esercizio 3.** Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui $\int_0^a \sin(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}dx + \frac{1}{4} = 0$.

**Soluzione** Si ha:

$$\int \sin(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}dx = \frac{1}{2}(\sin^2(x).$$

Da cui:

- se $a \geq 0$, si ha $\sin^2(a) = -\frac{1}{4}$ e non esiste soluzione.
- se $a < 0$, si ottiene $\sin^2(a) = \frac{1}{4}$ ossia $a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$

**Esercizio 4.** Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $f(x) = \frac{x^2}{4} - \log(\sqrt{x})$ fra i punti di ascissa $x = 1$ e $x = e$.

**Soluzione.** La lunghezza $l$ cercata è data da

$$l = |\int_1^e \sqrt{1 + f'^2}dx|$$

Quindi dato che $f'(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ e

$$\int \sqrt{1 + (\frac{x^2-1}{2x})^2}dx = \frac{1}{2}log(x) + \frac{x^2}{4}$$

si ha (osservando che la funzione integranda e' positiva e quindi si puo' trascurare il valore assoluto):

$$l = \frac{e^2+1}{4}.$$