Istituzioni di Matematica - CIA
6 Settembre 2013

Esercizio 1. Sia $f(x) = 7x - \sin(2x) + 8\cos(x)$:

a) Provare che f è invertibile sul suo dominio di definizione.

b) Se $g(y)$ denota la funzione inversa, calcolare $g'(8)$.

Soluzione. i) f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è monotona e quindi invertibile. Infatti $f'(x) = 7 - 2cos(2x) - 8sin(x) = 7 - 2(1 - 2sin^2(x)) - 8cos(x) = 4sin^2(x) - 8sin(x) + 5$. Ponendo $sin(x) = t$ si ottiene $4t^2 - 8t + 5 = 0$ che non ha soluzioni reali, dato che $f(0) = 8 > 0$ la funzione f è monotona strettamente crescente e quindi invertibile.
ii) Si ha $g'(8) = \frac{1}{Df(x_0)}$ dove x_0 è tale che $f(x_0) = 8$ ossia $x_0 = 0$ da cui $g'(8) = \frac{1}{5}$.

Esercizio 2. Discutere al variare $a \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema:

$$\begin{cases} x + ay + 3z & = & a - 2 \\ ax + 2y + az & = & 0 \\ 2ax + 3y + 6az & = & 2 - a \end{cases}.$$

noindent **Soluzione.** La matrice dei coefficienti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ a & 2 & a \\ 2a & 3 & 6a \end{pmatrix}.$$

è tale che $det(A) = 4a^3 - 6a = 2a(a^2 - \frac{3}{2})$ e quindi il sistema ha una sola soluzione per ogni valore di a diverso da $0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

se $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ con alcune operazioni elementari sulla matrice (valide per $a \neq 0, \pm\frac{3}{2}$ riduciamo a matrice originale e otteniamo

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & -2 \\ 0 & 2 - a^2 & -2a & a(2 - a) \\ 0 & 3 - 2a^2 & 0 & (a - 4)(a + 1) \end{pmatrix}.$$

se $a = 0$ otteniamo

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

riducendo a scalini si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi non esiste soluzione.
Se $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ l'ultima riga della matrice A si annulla mentre nella matrice completa $(a+1)(a-4) \neq 0$ e quindi anche in questo caso non esiste soluzione.

Esercizio 3. Determinare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ quante radici reali ha il polinomio $p(x) = 2x^3 + 3ax^2 - 8$.
Soluzione Trattandosi di un polinomio i terzo grado esistera' sempre almeno 1 soluzione, per vedere quando ne esistono 2 (di cui 2 coincidenti) o 3 basta controllare i massimi e i minimi di $p(x)$. Si ha $p'(x) = 6x^2 + 6ax = 6x(x+a)$ quindi (dato che $a > 0$) si ha un massimo per $x = -a$ e un minimo per $x = 0$ e $p(-a) = a^3 - 8$, $p(0) = -8$. se $a > 2$ esistono 3 soluzioni, se $a = 2$, 2 soluzioni e se $a < 2$ solo una.

Esercizio 4. Risolvere in campo complesso l'equazione

$$2z^2|z^2| + |z|^2 - 2z^2 - 1 = 0$$

.
Soluzione Dato che $|z^2| = |z|^2$ raccogliendo si ottiene $(|z|^2-1)(2z^2+1) = 0$ da cui si ottiene che le soluzioni sono $z \in \mathbb{C}$ con modulo 1 e $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Esercizio 5. Trovare le soluzioni $y(x)$ dell' equazione differenziale:

$$2e^{2x}\sqrt{y} + \frac{y'}{1+y} = 0$$

ed esprimerle in forma esplicita.
Soluzione $y = 0$ è soluzione. Dividendo per y si ottiene $2e^{2x} = -\frac{y'}{(1+y)\sqrt{y}}$. Da cui $-\int 2e^{2x}dx = \int \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}}$.
$-\int 2e^{2x}dx = -e^{2x} + c$. Con la sostituzione $t = \sqrt{y}$,
$\int \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \int \frac{2dt}{1+t^2}$ e $y(x) = (tg(-\frac{e^{2x}}{2} + c))^2$.