Istituzioni di Matematica
8 Gennaio 2014
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Data la matrice:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

i) decidere per quali valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ la matrice e' diagonalizzabile.
ii) Posto $a=1$, calcolare autovalori e autovettori.

Soluzione. i) Il polinomio caratteristico e' $p_A(t)=(t-1)(t^2-a^2)$, quindi gli autovalori sono $1,\pm a$. La matrice e' quindi sicuramente diagonalizzabile se $a\in\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}$.

Per $a=0$ gli autovalori sono 1 e 0 con molteplicita' 2, dato che si ha $A_0=A-0\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e $rank(A_0)=2$ la matrice non e' diagonalizzabile.

Per $a=1$ gli autovalori sono -1 e 1 con molteplicita' 2, dato che si ha $A_1=A-I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $rank(A_2)=1$ la matrice e' diagonalizzabile.

Per $a=-1$ gli autovalori sono -1 e 1 con molteplicita' 2, dato che si ha $A_1=A-I=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $rank(A_1)=2$ quindi la matrice non e' diagonalizzabile.

ii) Per $a=1$ si ha $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, gli autovalori sono . -1 e 1 con molteplicita' 2, $v_1=(1,0,0)$, $v'_1=(0,1,0)$ e $v_{-1}=(-2,-5,2)$ sono tre autovettori associati

Esercizio 2. Sia $f(x)=x^5(1-\log(|x|))$. Determinare:

i) Il dominio di definizione di *f*. La funzione e' estendibile con continuita' in $x=0$?
ii) Su quali intervalli la funzione e' crescente e su quali e' convessa.Trovare i punti minimo e massimo relativi e assoluti e i punti di flesso.
iii) Disegnare il grafico di *f*.
iv) Trovare il numero di soluzioni dell' equazione $f(x)=12$.

Soluzione. i) la funzione e' definita per ogni $x\neq 0$ ed e' una funzione dispari, quindi basta studiarla per $x>0$. Dato che il limite destro per $x\rightarrow 0$ vale 0, la funzione e' estendibile con continuita' in $x=0$.
ii) $f'(x)=x^4(4-5\log(x))$ qundi la funzione e' crescente per $x\in(-e^{4/5},0)\cup(0,e^{4/5})$ e decrescente altrove. Da cui in $x_m=-e^{4/5}$ la funzione ha un minimo e vale $f(x_m)=-e^4/5$, in $x_M=e^{4/5}$ la funzione ha un massimo e vale $f(x_M)=e^4/5$. Dato che i limiti per $x\rightarrow\pm\infty$ sono rispettivamente $\mp\infty$, si tratta di punti di minimo e massimo relativo. $f''(x)=x^3(11-20\log(x))$ e si hanno due punti di flesso per $x=\pm e^{11/20}$. Quindi la funzione e' convessa per $x\in(-\infty,-e^{11/20},0)\cup(0,e^{11/20})$ e concava altrove.
iv) Dato che $12>e^4/5$ dal grafico si osserva che l'equazione ha una sola soluzione.

Esercizio 3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} xy'-6y-x^2\sqrt{x}=0 \\ y(1)=3 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di una equazione lineare del I ordine. Dividendo per x si ottiene l'equazione $y'=\frac{6}{x}y+x\sqrt{x}$ che ha soluzioni $y(x)=x^6(-\frac{2}{7x^3\sqrt{x}}+c)$ da cui la soluzione cercata di ottiene per $c=\frac{23}{7}$.

Esercizio 4. Calcolare $\int\frac{\sin(2x)}{1-\cos(x)+\sin^2(x)}dx$

Soluzione. $\int\frac{\sin(2x)}{1-\cos(x)+\sin^2(x)}dx=\int\frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)+1-\cos^2(x)}dx$.
posto $t=\cos(t)$ si ha

$\int\frac{2t}{t^2+t-2}dt=\int\frac{2t+1}{t^2+t-2}dt-\int\frac{dt}{(t-1)(t+2)}$ e quindi l'integrale cercato e' dato da : $\log(|\cos^2(x)+\cos(x)-2|)-\log(\sqrt[3]{\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+2}})+c$

Esercizio 5. Risolvere in campo complesso l'equazione

$$z^4+(1-i)z^2-i=0$$

e scriverne le radici in forma algebrica.

Soluzione. Posto $z^2=w$ si ottiene che $w=\frac{i-1+\sqrt{2\mathrm{i}}}{2}$. Dato che $\sqrt{2\mathrm{i}}=\pm(1+i)$ si ha che $w=z^2=i$ e $w=z^2=-1$. Le soluzioni sono quindi $z_{1,2}=\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $z_{3,4}=\pm i$.