Istituzioni di Matematica - CIA
6 Febbraio 2014
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Sia $f(x) = log(|x^2 - x| - 1)$:

a) Trovare il dominio di definizione di f .

b) Trovare l'immagine di f.

c) Determinare $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$

d) La funzione è monotona?

d) disegnare il grafico di f

Soluzone. a) la funzione è definita quando $|x^2 - x| - 1 > 0$ ossia se: $\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - x > 1 \end{cases}$

oppure se $\begin{cases} x^2 - x \leq 0 \\ x - x^2 > 1 \end{cases}$.

Dal primo sistema si ottiene che $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, mentre il secondo sistema non ha soluzioni. Quindi $\mathcal{D} = (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.
b) Si ha $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to \frac{1-\sqrt{5}}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}^+} f(x) = -\infty$ e quindi dato che f è continua su $\mathcal{D}$ l'immagine di f e $\mathbb{R}$.
c) Dal punto a) si ha che per $x \in \mathcal{D}$ vale $x^2 - x \geq 0$ e quindi si può eliminare il valore assoluto e considerare $f(x) = log(x^2 - x - 1)$. $f(x) < 0$ se $x^2 - x - 1 < 1$ e quindi per $x \in (-1, 2) \cap \mathcal{D} = (-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}), 2)$.
d) $f'(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x-1})$, dato che il denominatore è sempre positivo la derivata ha il segno del numeratore che si annulla in $x = \frac{1}{2}$ e f è decrescente per $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ e crescente per $x \in (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, quindi f non è monotona.

Esercizio 2. Discutere al variare $a \in \mathbb{R}$ la risolubilità del seguente sistema (non si richiede il calcolo esplicito delle soluzioni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$)

$$\begin{cases} (1+a)y + (1+a)z & = & a \\ x + (a-1)z + (a+1)t & = & 0 \\ x - z + 2at & = & a \end{cases}$$

Soluzione.
La matrice completa del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+a & 1+a & 0 & a \\ 1 & 0 & a-1 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2a & a \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scalini la matrice A con operazioni elementari per riga, si ottiene che

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2a & a \\ 0 & 1+a & 1+a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 1-a & -a \end{pmatrix}.$$

Se $a \neq 0$ e $a \neq -1$, il sistema è risolubile ed ha ∞^1 soluzioni.

Se $a=-1$ si ha $S=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2a & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ per cui il sistema è impossibile.

Se $a=0$, $S=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ quindi il sistema è risolubile ed ha ∞^1 soluzioni.

Esercizio 3. Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $(x-2)^2y'-x(y-3)=0$.
Soluzione Dopo aver osservato che $y=3$ è soluzione dell'equazione, dividendo per $y-3$ si ottiene un'equazione a variabili separabili $\frac{y'}{y-3}=\frac{x}{(x-2)^2}$. Integrando si ha $\log|y-3| = \log|x-2| - \frac{2}{x-2}+c$ e quindi $y=3+k\frac{(x-2)}{e^{2/x-2}}$, $k\in\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Risolvere in campo complesso l'equazione

$$z^4+(\sqrt{3}-i)\overline{z}^2=0$$

.
Soluzione. Poniamo $z=r(\cos(t)+i\sin(t)$. L'equazione diventa $r^4(\cos(4t)+i\sin(4t)) = (-\sqrt{3}+i)r^2(\cos(-2t)+i\sin(-2t))$. Dato che $-\sqrt{3}+i=2(\cos(\frac{5}{6}\pi)+i\sin(\frac{5}{6}\pi))$, si deve avere: $r^4=2r^2$ e $4t=\frac{5}{6}\pi-2t+2k\pi$.
Quindi le soluzioni sono $z=0$, $z_k=\sqrt{2}(\cos(\frac{5}{36}\pi+\frac{k}{3}\pi)+i\sin(\frac{5}{36}\pi+\frac{k}{3}\pi))$ con $0\le k\le 5$.

Esercizio 5. Calcolare $\int arctg(\frac{1+x}{1-x})dx$.
Soluzione. Integrando per parti si ha $\int arctg(\frac{1+x}{1-x})dx = x\ arctg(\frac{1+x}{1-x})+\int\frac{x}{1+x^2}dx = x\ arctg(\frac{1+x}{1-x})+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+c$.