

Istituzioni di Matematica - CIA
10 Aprile 2015

NB. Le risposte non giustificate non saranno accettate.

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

- (1) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Allora f è surgettiva.
- (2) Siano f, g, h tre funzioni definite su \mathbb{R} , con $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x)} = k.$$

- (3) Al variare dei parametri reali α e β si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} \log^2(x+1) + \alpha \log(x+1) & -1 < x < 0 \\ \operatorname{arctg}(x) + \beta & x \geq 0 \end{cases}$$

Esistono valori di α e β per cui la funzione f è continua e derivabile sull'insieme di definizione.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x \log(x) & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

- i) La funzione f è continua a destra in $x = 0$?
- ii) La funzione è convessa?
- iii) Trovare massimi e minimi di f e disegnare il grafico di f .
- iv) Determinare l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 1$ e dire in quanti punti questa retta interseca il grafico di f .
- v) Calcolare l'area della regione del piano delimitata dall'asse delle ordinate, dal grafico della funzione f , dalla retta r e dalla retta $x = 2$.

Esercizio 3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + e^x y^2 - 2y = 0$ e poi risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + e^x y^2 - 2y = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$(z^2 + 2\Im(z^2) - (4 + 2i))|z^3 + i| = 0$$

Se esistono, esprimere le soluzioni che hanno modulo 1 in forma trigonometrica.

Esercizio 5. Dato il sistema

$$\begin{cases} x + y - kz = 2 \\ -3ky + z = k \\ 2x - y + z = -5k \end{cases}$$

- i) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le sue soluzioni possono essere interpretate geometricamente come punti di una retta r .
- ii) Scrivere l'equazione parametrica di r .
- iii) Scrivere l'equazione del piano perpendicolare ad r e passante per il punto $P = (1, 0, -1)$.