

Istituzioni di Matematica - CIA
30 Giugno 2014

Esercizio 1. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} & 0 < x < \pi \\ x - \alpha & x \leq 0 \end{cases}$$

è continua nel proprio dominio di definizione.

Esercizio 2. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Posto $a = 3$ trovare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 3. Data la funzione $f(x) = \cos(\pi x - \frac{\pi}{2})$, dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

- i) f è periodica di periodo 2π
- ii) $\text{Im}(f) = [-\pi, \pi]$
- iii) la retta di equazione $y = x$ è tangente al grafico di f per $x = 0$
- iv) la retta r di equazione $6y = 3\pi\sqrt{3}x + (3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi)$ è tangente al grafico di f in almeno un punto.

Esercizio 4. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-2}^1 x^2 \log(x+2) dx.$$

Esercizio 5. Risolvere, a scelta, uno dei seguenti esercizi.

a) Trovare, se esistono, valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che i vettori

$$v_1 = (1, 2, 0), \quad v_2 = (2, -a, a), \quad v_3 = (a, 1, 1)$$

giacciono tutti su uno stesso piano π_a . Per uno di tali valori calcolare l'equazione del piano parallelo a π_a passante per il punto $P = (3, 2, 1)$.

b) Data la funzione $y = 3^{3x} - 3^x$, determinare i punti P del grafico dove la tangente è orizzontale.