Istituzioni di Matematica - CIA
10 Aprile 2015

NB. Le risposte non giustificate non saranno accettate.

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

(1) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$ e $\lim_{x\to\infty} = \infty$. Allora f è surgettiva.

(2) Siano f, g, h tre funzioni definite su $\mathbb{R}$, con $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$, allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x)} = k.$$

(3) Al variare dei parametri reali α e β si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} \log^2(x+1) + \alpha \log(x+1) & -1 < x < 0 \\ arctg(x) + \beta & x \geq 0 \end{cases}$$

Esistono valori di α e β per cui la funzione f è continua e derivabile sull'insieme di definizione.

Soluzione. (1) L'affermazione è falsa. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

verifica le ipotesi ma l'immagine di f è $\{y < 0\} \cup \{y \geq 1\}$.

(2) L'affermazione è falsa. Ad esempio se prendiamo le funzioni $f(x) = x, g(x) = x, h(x) = x$, allora $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$, ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

(3) L'affermazione è vera. Infatti $f(x)$ è continua e derivabile su $(-1, 0) \cup (0, \infty)$. Inoltre $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, mentre $f(0) = arctg(0) + \beta = \beta$, per cui f è continua sull'insieme di definizione $A = (-1, \infty)$ se $\beta = 0$. Su $(-1, 0)$ si ha $f'(x) = 2log(x+1)\frac{1}{x+1} + \alpha\frac{1}{x+1}$ e dunque $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \alpha$; invece su $(0, \infty)$ si ha $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e dunque $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$. Pertanto f risulta derivabile su A se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\log(x) & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

i) La funzione f è continua a destra in $x = 0$?
ii) La funzione è convessa?
iii) Trovare massimi e minimi di f e disegnare il grafico di f.
iv) Determinare l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 1$ e dire in quanti punti questa retta interseca il grafico di f.
v) Calcolare l'area della regione del piano delimitata dall'asse delle ordinate, dal grafico della funzione f, dalla retta r e dalla retta $x = 2$.

Soluzione. i) La funzione è definita in $[0, +\infty)$ ed è continua a destra in $x = 0$ dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 + \lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 1 + 0$.
ii) La funzione è derivabile due volte in tutti i punti dell'intervallo $(0, +\infty)$ e si ha $f'(x) = \log(x) + 1$ e $f''(x) = \frac{1}{x}$, quindi la derivata seconda è sempre positiva e la funzione è convessa sul dominio di definizione.

iii) Dato che $f'(x) = \log(x) + 1 > 0$ per $x > e^{-1}$ la funzione decresce su $[0, e^{-1})$ e cresce altrove, quindi in $x = e^{-1}$ c'è un minimo assoluto e $f(e^{-1}) = 1 - e^{-1}$. Invece, dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $x = 0$ è un punto di massimo relativo.
iv) Poiché $f(1) = 1$ e $f'(1) = 1$ l'equazione della retta tangente in $(1, 1)$ al grafico di f è $y = x$ e, dato che la funzione è convessa, il suo grafico giace tutto al di sopra della retta e quindi il punto di tangenza è l'unico punto di intersezione tra retta e grafico.
v) L'area da calcolare è data da $A = \int_0^2 (f(x)-x)dx$. Dato che $1+x\log(x)$ non e' definita in $x = 0$, si tratta di un integrale generalizzato. Si ha:

$$\int (f(x) - x)dx = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \log(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$$

e quindi $A = \lim_{x\to 0^+}[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \log(x) - \frac{1}{4}x^2]_x^2 = 2\log(2) - 1$

Esercizio 3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + e^x y^2 - 2y = 0$ e poi risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + e^x y^2 - 2y = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione di Bernoulli con esponente positivo, quindi esiste la soluzione $y = 0$. Per determinare le altre soluzioni dividiamo per y^2 e poniamo $z = \frac{1}{y}$, da cui $z' = -\frac{y'}{y^2}$, quindi otteniamo l'equazione (lineare del primo ordine)

$$z' = -2z + e^x$$

L 'integrale generale di questa equazione è $z(x) = e^{-2x}\int e^{2x}e^x dx = e^{-2x}[\frac{1}{3}e^{3x} + c] = \frac{1}{3}e^x + ce^{-2x}$. Dato che $z(x) = \frac{1}{y}$ si ottengono le soluzioni $y(x) = (\frac{1}{3}e^x + ce^{-2x})^{-1}$.

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo che la soluzione del problema di Cauchy è $y = 0$.

Esercizio 4. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$(z^2 + 2\Im(z^2) - (4 + 2i))|z^3 + i| = 0$$

Se esistono, esprimere le soluzioni che hanno modulo 1 in forma trigonometrica.
Soluzione. Le soluzioni sono date dalle soluzioni delle due equazioni:

$$(z^2 + \Im(z^2) = (4 + 2i) \qquad |z^3 + i| = 0$$

Posto $z = a+ib$ si ha $\Im(z^2) = 2ab$, quindi la prima equazione diventa $(a^2-b^2+4ab)+2abi = 4 + 2i$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} ab &= 1 \\ a^2 - b^2 &= 0 \end{cases}$$

e le soluzioni sono $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1 - i$, che hanno entrambe modulo $\sqrt{2}$.
Per quanto riguarda la seconda equazione, dato che $z^3 = a^3 - ib^3 + 3a^2bi - 3ab^2$ si ha

$$\begin{cases} a(a^2 - 3b^2) &= 0 \\ b(b^2 - 3a^2) &= 1 \end{cases}$$

da cui si ottengono le soluzioni $z_3 = i$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ e $z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ che hanno tutte modulo 1. In forma trigonometrica sono $z_3 = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$, $z_4 = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})$ e $z_5 = \cos(\frac{7}{6}\pi) + i\sin(\frac{7}{6}\pi)$.
(Oppure, osservando che per ogni $w \in CC$ si ha $|w| = 0$ se e solo se $w = 0$ si potevano calcolare le radici terze di $-i$).

Esercizio 5. Dato il sistema

$$\begin{cases} x + y - kz &= 2 \\ -3ky + z &= k \\ 2x - y + z &= -5k \end{cases}$$

i) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le sue soluzioni possono essere interpretate geometricamente come punti di una retta r.
ii) Scrivere l'equazione parametrica di r
iii) Scrivere l'equazione del piano perpendicolare ad r e passante per il punto $P = (1, 0, -1)$.

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & 2 \\ 0 & -3k & 1 & k \\ 2 & -1 & 1 & -5k \end{pmatrix}$$

che attraverso operazioni elementari per riga si riduce alla matrice

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & 2 \\ 0 & -3 & 1+2k & -5k-4 \\ 0 & 0 & -(2k-1)(k+1) & 5k(k+1) \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq \frac{1}{2}$ e $k \neq -1$, il sistema ha una sola soluzione.
Se $k = \frac{1}{2}$ il sistema è equivalente al sistema con matrice completa

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{pmatrix},$$

per cui il sistema 'e impossibile.
Se $k \neq -1$, il sistema è equivalente al sistema con matrice completa

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque l'insieme delle sue soluzioni è la retta $r = \{(-\frac{2}{3}t + \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. La retta r è parallela al vettore $B = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$, per cui il piano perpendicolare ad r e passante per $P = (1, 0, -1)$ ha equazione $< B, X >=< B, P >$, ossia $-2x - y + 3z = -5$.