Istituzioni di Matematica - CIA
12 Febbraio 2015
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali quali false:

i) La funzione $f(x) = |x-2|$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle, relativamente all'intervallo $[1,3]$.

ii) la funzione
$$f(x) = \frac{\sin(x^2-1)}{\log(x)}$$
definita su $(1,+\infty)$ può essere estesa con continuità in $x_0 = 1$.

iii) Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che la tangente al grafico della funzione
$$f(x) = \frac{1-\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}(x)}$$
nel punto $(\frac{\pi}{4}, 0)$ è parallela alla retta di equazione $y = kx + 3$.

Soluzione. i) Falso. La funzione f è continua su $[1,3]$, $f(1) = f(3) = 1$, ma non è derivabile su $(1,3)$ infatti $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -1$ e $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 1$.
ii) Vero. Per poter essere estesa, si deve avere $\lim_{x\to 1^+} f(x) \in \mathbb{R}$ e si ha
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\frac{x-1}{\log(x)}(x+1) = 2 \in \mathbb{R}.$$
iii) Vero. Dato che $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ il punto $(\frac{\pi}{4}, 0)$ appartiene al grafico di f. Inoltre la funzione fè derivabile in $x = \pi 4$ e, dato che $f'(x) = -\frac{2}{1+2\sin(x)\cos(x)}$, si ha$f'(\frac{\pi}{4}) = -1$. L'equazione della retta tangente è
$$y = f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) = -x + \frac{\pi}{4}.$$
Per cui la retta $y = kx + 3$ è parallela alla retta tangente per $k = -1$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \log|1-x| + 2x$.

a) Trovare il dominio e l'immagine di f, ed eventuali asintoti.
b) Trovare eventuali massimi, minimi (relativi e assoluti) e flessi di f.
c) Trovare se esistono i valori $k \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni.

Soluzione a) La funzione è definita per $x \neq 1$ e, nell'insieme di definizione, è continua e derivabile. Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, quindi l'immagine di f è $\mathbb{R}$. Esiste un asintoto verticale per $x = 1$. Mentre non esistono asintoti obliqui dato che, anche se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = +\infty$
b) $f'(x) = \frac{1}{1-x} + 2 = \frac{2x-1}{x-1}$ e f è derivabile su tutto il dominio. La funzione è crescente per $x < \frac{1}{2}$ e per $x > 1$, decrescente per $\frac{1}{2} < x < 1$ Il punto $x = \frac{1}{2}$ è quindi un punto di massimo relativo e $f(\frac{1}{2}) = 1 - \log 2$. $f"(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$, sempre per $x \neq 1$, e quindi la funzione è sempre concava sulle semirette $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$.
c) L'unico valore di k per cui $f(x) = k$ ha due soluzioni è $k = 1 - \log(2)$.

Esercizio 3. Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la risolubilità del seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + \alpha z & = & 2 \\ 2x + \alpha y - z & = & 1 \\ x + y + 3z & = & \alpha - 1 \end{cases}$$

Soluzione. Indichiamo con

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_\alpha = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \alpha - 1 \end{array}\right)$$

rispettivamente la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema. Dato che $\det(A_\alpha) = -\alpha^2 + 5\alpha - 6 = -(\alpha - 3)(\alpha - 2)$ il sistema ha soluzione, unica, per ogni valore di $\alpha \neq 2, 3$. Le soluzioni possono essere calcolate o con la regola di Cramer o riducendo a scalini la matrice B_α e sono $X_\alpha = \left(\frac{\alpha(\alpha-2)}{\alpha-2}, \frac{2\alpha+4}{2-\alpha}, -1\right)$.
Se $\alpha = 2$, la matrice completa del sistema diviene:

$$B_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \qquad \cong \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

e quindi il sistema non ha soluzione.
Se $\alpha = 3$, la matrice completa del sistema diviene:

$$B_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \qquad \cong \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e quindi in questo caso il sistema ha infinite soluzioni, date da $X = (5 - 10t, -3 + 7t, t),\ t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \cos(x)y + \cos^3(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione Si tratta di una equazione lineare del primo ordine $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = \cos(x)$ e $b(x) = \cos^3(x)$.
Si ha $\int a(x)dx = \sin(x) + k$ da cui $A(x) = \sin(x)$ e

$$y(t) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)dx = e^{\sin(x)} \int e^{-\sin(x)} \cos^3(x)dx$$

con la sostituzione $t = \sin(x)$, si ottiene $\int e^{-\sin(x)} \cos^3(x)dx = \int e^{-t}(1 - t^2)dt =$ e, Integrando per parti , $\int e^{-t}(1 - t^2)dt = (1 + t)^2 e^{-t} + k$. Da cui

$$y(x) = e^{\sin(x)}[(1 + \sin(x))^2 e^{-sin(x)} + k] = (1 + \sin(x))^2 + ke^{\sin(x)}$$

imponendo la condizione iniziale si ricava $k = -1$ e quindi la soluzione è

$$y(x) = (1 + \sin(x))^2 - e^{\sin(x)}.$$

Esercizio 5. Risolvere e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni della seguente equazione:

$$z|z| - 2z + i = 0.$$

Soluzione. Posto $z = a + ib$ ed eguagliando a 0 la parte reale e la parte immaginaria si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} (\sqrt{a^2+b^2}-2)a = 0 \\ (\sqrt{a^2+b^2}-2)b + 1 = 0 \end{cases}$$

Da cui, dato che per $\sqrt{a^2+b^2} = 2$ il sistema non ha soluzione, si ottiene

$$\begin{cases} a = 0 \\ (|b|-2)b + 1 = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \\ b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \\ -b^2 - 2b + 1 = 0 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono $z = i$ e $z = (-1-\sqrt{2})i$ entrambe sull'asse immaginario.