Istituzioni di Matematica - CIA
12 Settembre 2014
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Risolvere a scelta uno dei seguenti esercizi:
a) Trovare parte reale e parte immaginaria del numero complesso

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{12} + \left(1 - i\right)^{-6} + \frac{2+i}{2i}$$

b) Date le rette

$$r : \begin{cases} x + y &= 2 \\ 2x + z &= 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x &= 1 - 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= t \end{cases}$$

riconoscerne la posizione reciproca.

Soluzione a) Scrivendo gli addendi in forma trigonometrica e ricordando le regole per il calcolo della potenza e dell-inverso si ottiene:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = \left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right)^{12} = \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) = 1$$

$$(1-i)^{-6} = \left(\sqrt{2}\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\big)\right)^{-6} =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6}\left(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})\right) = -\frac{1}{8}i$$

$$\frac{2+i}{2i} = \frac{1}{2} - i.$$

.
Cosí $\alpha = \frac{3}{2} - \frac{9}{8}i$.

b) La retta r è descritta in forma parametrica da

$$r : \begin{cases} x &= u \\ y &= 2 - u \\ z &= -2u \end{cases}$$

per cui è parallela al vettore $(1, -1, -2)$. Invece la retta s è parallela al vettore $(-2, 1, 1)$, pertanto r e s non sono parallele. Inoltre non esiste alcun valore $t \in \mathbb{R}$ per cui il punto $P(t) = (1 - 2t, 1 + t, t) \in r$ appartiene alla retta s, e dunque le rette non sono incidenti. Di conseguenza r e s sono sghembe.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{4 - x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$, calcolare l'area sottesa dal suo grafico sull'intervallo $[0, 9]$.

Soluzione. Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ l'integrale diviene:

$$\int \frac{4-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx = 2\int \frac{4-t^2}{(t+1)}dt$$

da cui si ricava una primitiva di $f(x)$, $G(x) = 2\sqrt{x} - x + 6\log(1+\sqrt{x})$. L'area cercata è quindi uguale a :

$$\int_0^9 |f(x)|dx = \int_0^4 f(x)dx - \int_4^9 f(x)dx$$

Il primo di questi integrali è un integrale improprio e quindi si ha:

$$\int_0^9 |f(x)|dx = [G(4) - \lim_{t\to 0^+} G(t)] - [G(9) - G(4)] = 12\log(3) - 6\log(4) + 3.$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione differenziale

$$\sin(t)y' + \cos(t)y = \sin(t)e^{-t}.$$

Soluzione. Si tratta di una equazione lineare del primo ordine.
Riscrivendo come $y' = -\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}y + e^{-t} = a(t)y + b(t)$ si ricava:
$\int a(t)dt = -\log(|\sin(t)|) + k$ da cui $A(t) = -\log(\sin(t))$ e

$$y(t) = e^{A(t)}\int e^{-A(x)}b(t)dt = \frac{1}{\sin(t)}\int \sin(t)e^{-t}dt =$$

$$-\frac{1}{2\sin(t)}[e^{-t}(\sin(t)+\cos(t)) + k].$$

Esercizio 4. Discutere la risolubilita' del seguente sistema al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x + ay - z &= b \\ 2x + y - az &= 4 \\ x + z &= 2 \end{cases}$$

Soluzione. Riducendo a scalini la matrice completa del sistema si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -(a+2) & 0 \\ 0 & 0 & a^2+2a-3 & b-4 \end{array}\right)$$

Se $a^2 + 2a - 3 = (a-1)(a+3) \neq 0$ la matrice dei coefficienti ha rango 3 quindi per $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$ esiste un'unica soluzione $\forall b \in \mathbb{R}$.
Se $a = 1$ o $a = -3$, il rango della matrice dei coefficienti è 2 quindi se $b \neq 4$ non esiste soluzione, se $b = 4$ esiste una infinità di soluzioni.

Esercizio 5. La seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x - e^x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ (1-x)\log(1-x) & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

i) è continua e derivabile sul suo dominio di definizione?

ii) Determinare gli eventuali massimi o minimi di f.

Soluzione. La funzione f è continua e derivabile su $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Poiché $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, la funzione è continua su tutto il dominio di definizione. Inoltre, poiché $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, evidentemente f non ha minimo.

Su $x < 0$ si ha $f'(x) = 1 - e^x$ e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$; inoltre f' è positiva e dunque su $x < 0$ f è crescente e negativa. Su $(0, 1)$ si ha $f'(x) = -\log(1 - x) - 1$ per cui $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$ e dunque f non è derivabile in 0. Inoltre su $(0, 1)$ la funzione f è negativa, per cui f ha un punto di massimo in 0 e il massimo vale 0.