Istituzioni di Matematica - CIA
5 Giugno 2014

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2 - 2sin(5x)$.

a) Trovare ampiezza e periodo di f.
b) Disegnare il grafico di f.
c) Trovare $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0\}$.

Soluzione. a) L'ampiezza di f è 2, quindi il grafico è compreso fra 0 e 4, il periodo è $\frac{2\pi}{5}$.
c) per a) si ha che $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0\} = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 2.

a) Discutere al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del seguente sistema lineare (non si richiede il calcolo esplicito delle soluzioni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$)

$$\begin{cases} hx - 2y + z & = & k \\ hx + (h-1)y + (h+2)z & = & k \\ (h+1)y + 2z & = & -k \end{cases}$$

b) Fissati i valori $h = 1$, $k = 0$ determinare l'insieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema e determinare l'equazione del piano L in $\mathbb{R}^3$ perpendicolare ad S e passante per il punto $(1, 1, 2)$.
c) Calcolare la proiezione ortogonale dell'origine sul piano L.

Soluzione.
a) La matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} h & -2 & 1 \\ h & h-1 & h+2 \\ 0 & h+1 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} h & -2 & 1 & k \\ h & h-1 & h+2 & k \\ 0 & h+1 & 2 & -k \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha soluzione se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$. Attraverso operazioni elementari per riga, si riducono le matrici A e A' rispettivamente alle matrici

$$S = \begin{pmatrix} h & -2 & 1 \\ 0 & h+1 & h+1 \\ 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix} \quad S' = \begin{pmatrix} h & -2 & 1 & k \\ 0 & h+1 & h+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h & -k \end{pmatrix}$$

per cui $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} S$ e $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} S'$.

Se $h \neq 0$, $h \neq 1$ e $h \neq -1$, e per qualsiasi valore di $k \in \mathbb{R}$, si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} S = 3$ e $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} S' = 3$, per cui il sistema è risolubile ed ha

Se $h = 0$ si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} S = 2$; in S' l'unico minore di ordine 3 senza colonne nulle è $\begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix}$ che ha determinante $4k$. Dunque se $h = 0$ e $k \neq 0$ si ha $\operatorname{rk} A' = 3$ e il sistema è impossibile. Se invece $h = 0$ e $k = 0$ si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 2$ e il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $h = 1$ si ha $S' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & k \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$ per cui il sistema ha soluzione se e solo se $k = 0$, nel qual caso ha ∞^1 soluzioni.

Se $h = -1$, la seconda riga di S' si annulla (e corrisponde all'identità 0x +0y+0z=0 che possiamo eliminare dal sistema senza alterare l'insieme delle soluzioni). Poiché $\operatorname{rk} S = \operatorname{rk} S' = 2$ per ogni valore di k, il sistema ha ∞^1 soluzioni per $h = -1$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$.

b) Come abbiamo visto, nel caso $h = 1$ e $k = 0$ il sistema (che è omogeneo) ha ∞^1 soluzioni, per cui S è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 (ossia è una retta). Si ricava subito che S è la retta per l'origine generata dal vettore $v = (3, 1, -1)$. Ogni piano ortogonale al vettore v ha equazione $3x + y - z = a$ con $a \in \mathbb{R}$; tale piano passa per $(1, 1, 2)$ se e solo se $a = 2$ per cui il piano L richiesto ha equazione $3x + y - z = 2$.

c) La proiezione ortogonale dell'origine su L sara‘ data dall'interserzione della retta S con il piano L. Il vettore $bv = (3b, b, -b)$ appartiene a L se e solo se $b = 2/11$ per cui la proiezione cercata è il punto $(6/11, 2/11, -2/11)$.

Esercizio 3. Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{(x^2+1)}{y+1} y' = x$$

Soluzione Dividendo per $x^2 + 1$ si ottiene una equazione a variabili separabili:

$$\frac{y'}{y+1} = \frac{x}{(x^2+1)}$$

Integrando si ottiene $log(|y + 1|) = \frac{1}{2} log(1 + x^2) + c$, da cui segue che le soluzione sono $y = k\sqrt{1 + x^2} - 1$ con $k \neq 0$.

Esercizio 4. Risolvere in campo complesso l'equazione

$$z - i(z - 1) = |z + i|.$$

Soluzone. Posto $z = a + ib$ e uguagliando a zero la parte reale e la parte immaginaria si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a + b - \sqrt{a^2 + (b+1)^2} & = & 0 \\ b - a + 1 & = & 0 \end{cases}$$

$2a+1=\sqrt{2a^2}$ ossia $2a+1=\sqrt{2}|a|$. Da questo segue che l'equazione ha una sola soluzione $\alpha=(\frac{2+\sqrt{2}}{2})+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 5. Calcolare il valor medio della funzione $f(x)=\frac{1}{x^2}\text{arctg}(\frac{1}{x})$ nell'intervallo $[\frac{1}{\sqrt{3}},1]$.
(Semplificare il più possibile il risultato).
Soluzione. Calcoliamo una primitiva di f. Con la sostituzione $t=\frac{1}{x}$ l'integrale diviene:

$$\int -\text{arctg}(t)dt$$

integrando per parti si ha $\int \text{arctg}(t)dt = -t\ \text{arctg}(t) + \int \frac{t}{1+t^2}\ dt = -t\ \text{arctg}(t) + \log(\sqrt{1+t^2})$ da cui il valor medio di f è:

$$v_m(f)=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} f(x)dx = \frac{3+\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+log(\sqrt{2})-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right).$$