Istituzioni di Matematica - CIA
8 Gennaio 2015
Traccia delle soluzioni

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log(1 + \operatorname{arctg}(x^2))$.

a) Trovare il dominio e l'immagine di f.
b) Trovare eventuali massimi e minimi (relativi e assoluti) di f.
c) Trovare i valori $k \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni.

Soluzione. a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e, dato che $1+\operatorname{arctg}(x^2) \geq 1$, si ha $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; inoltre la funzione è pari.
Si ha $f'(x) = \frac{2x}{(1+\operatorname{arctg}(x^2))(x^4+1)}$, quindi la funzione è strettamente decrescente per $x < 0$ e strettamente crescente $x > 0$. In $x = 0$ si ha un minimo assoluto e la funzione vale $f(0) = 0$. Infine dato che $\lim_{x\to\infty} f(x) = \log(1 + \frac{\pi}{2})$ si ottiene che $\operatorname{Im}(f) = [0, 1 + \frac{\pi}{2})$.
b) dal punto a) segue che in $x = 0$ la funzione ha un minimo assoluto e non esiste massimo.
c) Dato che $\operatorname{Im}(f) = [0, 1 + \frac{\pi}{2})$, non esistono soluzioni per $k \in (-\infty, 0) \cup [1 + \frac{\pi}{2}, +\infty)$.

Esercizio 2. Dato il sistema:

$$\begin{cases} 3x + y & = a \\ 5x - by - z + 1 & = 0 \\ x + z & = 2 \end{cases}$$

determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il sistema ha soluzioni. Nel caso in cui esistono infinite soluzioni, calcolarle.

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & a \\ 5 & -b & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Riducendo a scalini si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & a-6 \\ 0 & 0 & 6+3b & 11-b(a-6) \end{array}\right).$$

Quindi se $b \neq -2$ il sistema ha un'unica soluzione per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$
Se $b = -2$ il sistema è risolubile se e solo se $11 - b(a - 6) = 0$, ossia $a = \frac{1}{2}$.
Più precisamente se $b = -2$ e $a = \frac{1}{2}$ esistono infinite soluzioni del sistema

date da
$$\begin{cases} x &= 2-t \\ y &= \frac{6t-11}{2} \\ z &= t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
Infine se $b=-2$ e $a \neq \frac{1}{2}$ non esiste soluzione.

Esercizio 3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' - 2y = \frac{e^{3x}}{e^x+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine; le soluzioni sono esprimibili come $y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx$ dove $A'(x) = 2$ e $b(x) = \frac{e^{3x}}{e^x+1}$. Quindi $A(x) = 2x$ e, dato che $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \log(e^x+1) + k$, otteniamo $y(x) = e^{2x}(\log(e^x+1)+k)$. Imponendo la condizione $y(0) = 0$ otteniamo $k = -\log(2)$ e quindi la soluzione $y(x) = e^{2x}(\log(\frac{e^x+1}{2}))$.

Esercizio 4. Risolvere in campo complesso l'equazione
$$z^6 + 2z^3 + 4 + i = \frac{1+i}{1-i}.$$

Soluzione. Dato che $\frac{1+i}{1-i} = i$, ponendo $t = z^3$ si ottiene l'equazione $t^2+2t+4=0$ che ha soluzioni $t_1 = -1+i\sqrt{3}$ e $t_2 = -1-i\sqrt{3}$. Dobbiamo quindi risolvere $z^3 = -1+i\sqrt{3}$ e $z^3 = -1-i\sqrt{3}$. Scrivendo in forma trigonometrica $t_1 = 2(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi))$, $t_2 = 2(\cos(\frac{4}{3}\pi) + i\sin(\frac{4}{3}\pi))$ si ottengono le soluzioni: $z = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{2}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{2}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}))$ e $z = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{4}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{4}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}))$, con $k = 0,1,2$.

Esercizio 5. i) Trovare la funzione $F(x)$ tale che:
$$\begin{cases} F'(x) &= x^2\cos(2x) \\ F(\pi) &= 1 \end{cases}$$
ii) Provare che in $x=0$ la funzione $F(x)$ ha un flesso.
Soluzione. i) Integrando (due volte) per parti si trova che
$$\int x^2\cos(2x)dx = \frac{(2x^2-1)\sin(2x) + 2x\cos(2x)}{4} + c$$
e quindi la primitiva cercata (imponendo la condizione $F(\pi) = 1$) è
$$F(x) = \frac{(2x^2-1)\sin(2x) + 2x\cos(2x)}{4} + (1 - \frac{\pi}{2}).$$
ii) Si ha $F''(x) = 2x(\cos(2x) - x\sin(2x))$ quindi $F''(0) = 0$. Inoltre la funzione $\varphi(x) = \cos(2x) - x\sin(2x)$ è continua e tale che $\varphi(0) > 0$; pertanto $\varphi(x)$ è positiva in un intorno $(-\delta, \delta)$ di 0. Di conseguenza si ha $F''(x) < 0$

per $x \in (-\delta, 0)$ e $F''(x) > 0$ per $x \in (0, \delta)$ e quindi $x = 0$ è un punto di flesso per $F(x)$.