Istituzioni di Matematica - CIA
30 Giugno 2014

Esercizio 1. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} & 0 < x < \pi \\ x - \alpha & x \leq 0 \end{cases}$$

è continua nel proprio dominio di definizione.

Soluzione. Il valore di α deve essere tale che

$$-\alpha = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

e quindi $\alpha = -1$.

Esercizio 2. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Posto $a = 3$ trovare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Soluzione. Le radici del polinomio caratteristico di A, ossia $p(t) = \det(A - tI) = -t(t^2 - 2t - a)$, sono $t_1 = 0$, $t_2 = 1 + \sqrt{1+a}$, $t_3 = 1 - \sqrt{1+a}$. Quindi la matrice è certamente non diagonalizzabile per $a < -1$. Esistono autovalori di molteplicità maggiore di 1 se

i) $a = -1$, quando $t_2 = t_3 = 1$
ii) $1 - \sqrt{a+1} = 0$, ossia $a = 0$ quando $t_1 = t_3 = 0$

Quando $a = -1$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2; poiché $\mathrm{rk}(A - I) = 2$, la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è 1, e quindi la matrice non è diagonalizzabile.
Per $a = 0$, l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2; poiché $\mathrm{rk}(A) = 2$, la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è 1 quindi anche in questo caso la matrice non è diagonalizzabile.
Concludendo la matrice è diagonalizzabile per ogni valore di $a \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
Nel caso $a = 3$ per trovare le matrici S e D calcoliamo tre autovettori associati rispettivamente agli autovalori distinti $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ e $t_3 = -1$; otteniamo così i vettori $v_1 = (4, -7, 1) \in V(0)$, $v_2 = (1, 2, 1) \in V(3)$ e $v_3 = (1, -2, 1) \in V(-1)$. Scegliendo come matrice S quella avente per colonna gli autovettori appena calcolati, si ottiene

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Data la funzione $f(x) = \cos(\pi x - \frac{\pi}{2})$, dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

i) f è periodica di periodo 2π

ii) $\mathrm{Im}(f) = [-\pi, \pi]$

iii) la retta di equazione $y = x$ è tangente al grafico di f per $x = 0$

iv) la retta r di equazione $6y = 3\pi\sqrt{3}x + (3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi)$ è tangente al grafico di f in almeno un punto.

Soluzione. Notiamo innanzitutto che la funzione si può riscrivere come $f(x) = \sin(\pi x)$.

i) Falsa. Il periodo di f è $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

ii) Falsa. Infatti $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.

iii) Falsa. La retta tangente al grafico di f nel punto $(0, 0)$ ha equazione $y = f(0) + f'(0)x = \pi x$.

iv) Vera. La retta r ha pendenza $\frac{3\pi\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. La tangente al grafico di f in un punto $(x_0, f(x_0))$ ha pendenza $f'(x_0)$. Dunque vediamo se esiste un valore $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. Poiché $f'(x) = \pi cos(\pi x)$, cerchiamo x_0 tale che $\pi cos(\pi x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

I valori che soddisfano l'equazione $\pi cos(\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ formano l'insieme $\{x = \frac{1}{6} + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x = -\frac{1}{6} + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ad esempio per $x_0 = \frac{1}{6}$ il grafico contiene il punto $P = (\frac{1}{6}, f(\frac{1}{6}) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$. La retta tangente al grafico di f nel punto P ha equazione $y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi(x - \frac{1}{6})$, cioè $6y - 3 = 3\pi\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$, che è l'equazione di r.

Esercizio 4. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-2}^{1} x^2 \log(x+2)dx.$$

Soluzione. Cominciamo a calcolare una primitiva di $x^2 \log(x+2)$ integrando per parti.

$\int x^2 \log(x+2)dx = \frac{x^3}{3} \log(x+2) - \int \frac{x^3}{3(x+2)}dx =$

$= \frac{x^3}{3} \log(x+2) - \frac{1}{3} \int (x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2})dx =$

$\frac{x^3}{3} \log(x+2) - \frac{1}{3}(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\log(x+2)) + c.$

Quindi si ha:

$\int_{-2}^{1} x^2 \log(x+2)dx =$

$$\lim_{b \to -2^+} \left[\frac{x^3}{3} \log(x+2) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \log(x+2) \right]_b^1 =$$

$$= \lim_{b \to -2^+} \big(\frac{1}{3} \log(3) - \frac{10}{9} + \frac{8}{3} \log(3) - \frac{b^3}{3} \log(b+2) +$$

$$+ \frac{b^3}{9} - \frac{b^2}{3} + \frac{4}{3}b - \frac{8}{3} \log(b+2) \big) =$$

$$= \lim_{b \to -2^+} \big(3\log(3) + \frac{b^3 - 3b^2 + 12b - 10}{9} - \frac{b^3 + 8}{3}\log(b+2)\big) = 3\log(3) - 6.$$

Esercizio 5. Risolvere a scelta uno dei seguenti esercizi.
a) Trovare, se esistono, valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che i vettori

$$v_1 = (1, 2, 0), \quad v_2 = (2, -a, a), \quad v_3 = (a, 1, 1)$$

giacciano tutti su uno stesso piano π_a. Per uno di tali valori calcolare l'equazione del piano parallelo a π_a passante per il punto $P = (3, 2, 1)$.
b) Data la funzione $y = 3^{3x} - 3^x$, determinare i punti P del grafico dove la tangente è orizzontale.

Soluzione. a) Affinché i vettori giacciano su uno stesso piano, essi devono essere linearmente dipendenti. Poiché

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -a & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2(a-2)(a+1)$$

i vettori sono linearmente dipendenti se $a = 2$ o se $a = -1$. Notiamo che per entrambi questi valori il rango della matrice è 2 e quindi i vettori generano definiscono un piano passante per l'origine. Per $a = 2$ il piano π_2 ha equazione $2x - y - 3z = 0$ e quindi il piano cercato ha equazione $2x - y - 3z = 1$. Per $a = -1$, π_{-1} ha equazione $2x - y + 3z = 0$ da cui si ottiene che il piano parallelo passante per P ha equazione $2x - y + 3z = 7$
b) Imponiamo che la derivata

$$y' = 3\log(3)3^{3x} - \log(3)3^x = \log(3)3^x(3^{2x+1} - 1) = 0$$

da cui segue $x = -\frac{1}{2}$. Pertanto il punto cercato è $P = (-\frac{1}{2}, -\frac{2\sqrt{3}}{9})$.