Istituzioni di Matematica - CIA
15 Settembre 2015

Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. a) Studiare massimi e minimi della funzione $f(x) = \sqrt{|x-3|}$ sull'intervallo $[2, 4]$
b) Sono verificate le ipotesi del teorema di Rolle per f (su $[2, 4]$)? Giustificare la risposta.
Soluzione. La funzione è continua su $[2, 4]$, inoltre $f(x) >= 0$ per ogni $x \in [2, 4]$. Dato che $f(3) = 0$ si ha che $x = 3$ è un punto di minimo (assoluto). Dato che $f' = \dfrac{|x-3|}{2(x-3)\sqrt{|x-3|}}$ la funzione non è derivabile in $x = 3$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (2, 3)$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (3, 4)$, da cui segue che $x = 2$ e $x = 4$, dove f vale 1, sono punti di massimo assoluto. Anche se $f(2) = f(4) = 1$ il teorema di Rolle non vale, dato che f non è derivabile in $(2, 4)$.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x) = \left(\dfrac{1}{\sin(x)}\right)^{\mathrm{tg}(x)}$

i) Trovare il dominio di definizione di f e di f'.
ii) La funzione f è periodica? Se si, trovare il periodo di f
iii) Dire se f è estendibile con continuità in $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Soluzione. i) La funzione è definita quando

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin(x)} > 0 \\ \mathrm{tg}(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ossia per

$$\begin{cases} 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ x \in \mathbb{R}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Da cui segue che il dominio di definizione di f è:

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Sul dominio di definizione la funzione è continua. La derivata è data da:

$$f'(x) = D(e^{\mathrm{tg}(x)\log(\frac{1}{\sin(x)})}) = f(x) = \left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^{\mathrm{tg}(x)} D(-\mathrm{tg}(x)\log(\sin(x))) =$$

$$\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^{\mathrm{tg}(x)} \left(-\frac{\log(\sin(x))}{\cos^2(x)} - 1\right)$$

quindi la funzione è derivabile su tutti i punti del dominio.
ii) Dato che $\sin(x)$ è periodica di periodo 2π e $\mathrm{tg}(x)$ è periodica di periodo π la funzione f è periodica di periodo 2π.
iii) Dato che f è periodica di periodo $2k\pi$ basta considerare $x = \frac{\pi}{2}$. Si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{-\mathrm{tg}(x)\log(\sin(x)}$$

Dato che, applicando il teorema dell'Hopital si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}(x)\log(\sin(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\log(\sin(x))}{\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos(x)\log(\sin(x)) + \cos(x)}{\sin(x)} = 0$$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1$ e f è estendibile con continuità in $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Esercizio 3. Trovare le radici complesse dell'equazione:

$$(z^2 - 6\overline{z} + 5)(z^3(3 - i\sqrt{3})^2 + 2|z^4|) = 0$$

Soluzione Risolviamo separatamente le equazioni $z^2 - 6\overline{z} + 5 = 0$ e $z^3(3 - i\sqrt{3}) + 2|z^4| = 0$, per la legge di annullamento delprodotto le soluzioni dell'equazione data saranno date dell'unione delle soluzioni delle due equazioni.
Per risolvere la prima equazione poniamo $z = a + ib$. Uguagliando a zero la parte reale e la parte immaginaria del numero ottenuto otteniamo

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 6a + 5 = 0 \\ b(a+3) = 0 \end{cases}$$

Se $b = 0$ da $a^2 - 6a + 5 = 0$ otteniamo le soluzioni $z_1 = 5$ e $z_2 = 1$
Se $a = -3$ allora $b = \pm 4\sqrt{2}$ e quindi le soluzioni sono $z_{3,4} = -3 \pm 4\sqrt{2}i$.
Per risolvere la seconda equazione poniamo $z = r(\cos(t) + i\sin(t))$. Dato che $3 - i\sqrt{3} = \sqrt{12}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$ l'equazione diviene

$$r^3(\cos(3t) + i\sin(3t))(12(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = 2r^4(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

da cui

$$\begin{cases} r^3(r-6) = 0 \\ 3t = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

quindi $z_5 = 0$, $z_{6,7,8} = 6(\cos(\frac{4}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{4}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}))$ con $k = 0, 1, 2$.

Esercizio 4. Per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ha una sola soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione? Nel caso in cui esistano infinite soluzioni, calcolarle.

$$\begin{cases} 2x+ay+z &= a \\ x+by+2z &= 1 \\ 2x+ay+z &= 1 \\ -x-y+z &= b \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & b & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & b \end{array}\right).$$

Quindi se $a \neq 1$ il sistema è impossibile per ogni valore di $b \in \mathbb{R}$.
Per $a = 1$ la matrice diviene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & b \end{array}\right).$$

Riducendo a scalini si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b-1 \\ 0 & 0 & 3b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi se $a = 1$ e $b \neq 0$ il sistema ha una sola soluzione per ogni valore di $b \in \mathbb{R}$.
Se $a = 1$ e $b = 0$ il sistema ha una infinità di soluzioni. Da

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

si ottiene che le soluzioni sono $X = (1-2t, -1+3t, t), t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{1-2x^2}{x(x^2-1)}y = 2x^2e^{2x}\sqrt{x^2-1}, \quad \text{per } \ x > 1$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione come $y' = \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}y + 2x^2e^{2x}\sqrt{x^2-1} = a(x)y + b(x)$.

Se $A(x)$ indica una primitiva di a vale $A(x) = \int \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}$. Il denominatore ha 3 radici reali distinte cosí $a(x)$ si decompone come:

$$\frac{2x^2-1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

quindi $A(x) = \log(x\sqrt{x^2-1})$ (dato che $x > 1$). Da cui si ricava:

$$y(x) = x\sqrt{x^2-1} \int 2xe^{2x}dx = x\sqrt{x^2-1}\left(\frac{2x-1}{2}e^{2x} + c\right)$$