Istituzioni di Matematica - CIA
29 Giugno 2015

Esercizio 1. Dire se la funzione $f(x) = \sqrt{\log\left(\dfrac{x^2+3}{3x^2-3x+1}\right)}$ verifica nel suo insieme di definizione le ipotesi del Teorema di Rolle e, in caso affermativo, dire in quanti e quali valori di x la tangente al grafico di f è orizzontale.

Soluzione. Si ha che $3x^2 - 3x + 1 > 0$ e $x^2 + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ quindi la funzione è definita per i valori di $x \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{x^2+3}{3x^2-3x+1} \geq 1$, ossia per $x \in [-\frac{1}{2}, 2]$. La derivata di f è data da:

$$f'(x) = \frac{-3x^2 - 16x + 9}{2(x^2+3)(3x^2-3x+1)\sqrt{\log\left(\frac{x^2+3}{3x^2-3x+1}\right)}}$$

quindi la funzione è derivabile in $(-\frac{1}{2}, 2)$. Per decidere se vale il teorema di Rolle calcoliamo $f(-\frac{1}{2}) = 0 = f(2)$. Quindi il teorema di Rolle vale ed esiste almeno un punto $x \in \Big(-\frac{1}{2}, 2\Big)$ tale che $f'(x) = 0$ ossia tale che la retta tangente al grafico in $(x, f(x))$ è orizzontale. Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $3x^2 + 16x - 9 = 0$, quindi per $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{91}}{3}$ ma solo $x = \dfrac{-8 + \sqrt{91}}{3} \in \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$, per cui esiste solo un valore di x tale che la tangente al grafico di f è orizzontale.

Esercizio 2. Sapendo che $(1 + i)$ è una radice del polinomio $p(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$, trovare tutte le altri radici. Scrivere la fattorizzazione in fattori irriducibili di $p(z)$ su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

Soluzione. Il polinomio è a coefficienti reali quindi se $(1 + i)$ è soluzione anche il numero complesso coniugato $(1 - i)$ lo è. Dividendo allora $p(z)$ per $q(z) = (z - (1 + i))(z - (1 - i)) = z^2 - 2z + 2$ si ottiene $z^2 - 3z + 2$ che ha due radici reali $z = 1$ e $z = 2$. Quindi la fattorizzazione su $\mathbb{R}$ è $p(z) = q(x)(z-1)(z-2)$ e su $\mathbb{C}$, $p(z) = (z-(1+i))(z-(1-i))(z-2)(z-2)$.

Esercizio 3. Determinare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione $e^{x^9-9x+1} = a$.

Soluzione. La funzione $f(x) = e^{x^9-9x+1}$ è definita, continua e derivabile su $\mathbb{R}$ ed assume valori positivi su tutta la retta reale. Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

e $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Inoltre

$$Df(x) = 9e^{x^9-9x+1}(x^8-1) = 9e^{x^9-9x+1}(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1),$$

per cui $Df(x)$ è negativa se e solo se $x^2 - 1 < 0$, ossia f è decrescente per $-1 < x < 1$ ed è crescente altrove. Pertanto $x_0 = -1$ è un punto di massimo relativo di $f(x)$ e $f(-1) = e^9$; inoltre $x_1 = 1$ è un punto di minimo relativo di $f(x)$ e $f(1) = \frac{1}{e^7}$. Calcolando il numero di punti in cui il grafico di f interseca la retta orizzontale di equazione $y = a$ troviamo che l'equazione data ha:
0 soluzioni se $a \leq 0$
1 soluzione se $0 < a < \frac{1}{e^7}$ o se $a > e^9$,
2 soluzioni per $a = \frac{1}{e^7}$ e per $a = e^9$,
3 soluzioni per $\frac{1}{e^7} < a < e^9$.

Esercizio 4. Discutere la risolubilità del seguente sistema al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 & = & 0 \\ ay + z & = & 0 \\ ax + 2ay + a^2 z + 1 & = & 0 \\ -x + (a-2)y & = & b \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a & 2a & a^2 & -1 \\ -1 & a-2 & 0 & b \end{array}\right).$$

Riducendo a scalini si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right).$$

Quindi se $b \neq 1$ il sistema non ha soluzione per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$.
Se $b = 1$ e $a \neq 0, 1$ la matrice ridotta è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

e quindi il sistema ha un'unica soluzione.

Se $b = 1$ e $a = 0$ la matrice ridotta è
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
e il sistema non ha soluzione.
Infine se $b = 1$ e $a = 1$ la matrice ridotta è
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
ed esiste una infinità di soluzioni.

Esercizio 5. Risolvere l'equazione differenziale definita per $x > 1$
$$y' + \frac{1-2x^2}{x(x^2-1)}y = 2x^2\sqrt{x^2-1}$$

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine. Calcoliamo
$$\int \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}dx = \int \frac{3x^2-1}{x^3-x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \log\left(x\sqrt{x^2-1}\right) + c.$$
Posto $A(x) = \log\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$ si ottiene
$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} 2x^2\sqrt{x^2-1}dx = (x^3+cx)\sqrt{x^2-1}.$$