Istituzioni di Matematica - CIA
3 Giugno 2015

Esercizio 1. Studiare la funzione $f(x) = x - \log(x^2 - 2x)$

a) Trovare il dominio, l'immagine di f, ed eventuali asintoti.
b) Trovare eventuali massimi, minimi (relativi e assoluti) e flessi di f.
c) Disegnare il grafico di f
d) Trovare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che la retta di equazione $y = x + k$ interseca il grafico di f
e) Trovare, se esistono, i punti P tali che la retta tangente al grafico della curva in P sia parallela alla retta di equazione $x + 3y + 7 = 0$ e scrivere le equazioni di tali rette.

Soluzione. a) La funzione è definita per $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ed è continua sul suo dominio di definizione . Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, quindi dato che f è continua su $(-\infty, 0)$, $Im(f) = \mathbb{R}$. Le rette $x = 0$ e $x = 2$ sono asintoti verticali, invece non esistono asintoti obliqui dato che, anche se $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, vale $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = -\infty$.
b) Si ha $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 2x}$, quindi la funzione è derivabile sul suo dominio di definizione. Esiste solo un valore x_0 accettabile per cui $f'(x_0) = 0$ ed è $x_0 = 2 + \sqrt{2}$. x_0 è un punto di minimo relativo e il valore minimo è $f(2+\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2}-\log(2+2\sqrt{2})$. $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2}$ e non si trova alcun valore per cui $f'' = 0$, quindi non esistono punti di flesso.
d) I valori possibili sono i valori per cui $\log(x^2 - 2x) + k = 0$ ossia per cui $x^2 - 2x - e^{-k} = 0$ e quindi, dato che $1 + e^{-k} > 0$ sempre, per ogni $k \in \mathbb{R}$.
e) La retta $x + 3y + 7 = 0$ ha coefficiente angolare $m = -\frac{1}{3}$ e la retta tangente ad un punto $P = (x_0, f(x_0))$ sul grafico della curva $m' = f'(x_0)$. Imponendo che $m = m'$ si ottiene $-\dfrac{1}{3} = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 2x}$. L'unica soluzione accettabile di questa equazione è $x_0 = 3$. Da cui $P = (3, 3 - log(3))$ e la retta tangente in P al grafico di f ha equazione $x + 3y - 3(4 - \log(3)) = 0$.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x) = \mathrm{arctg}(\dfrac{\sqrt{3} + x}{e^x})$ definita su $A = [-\frac{1}{2}, +\infty)$

i) Provare che f è invertibile su A
ii) Detta $g(y)$ la funzione inversa, trovare il dominio di g

iii) Calcolare $g'(\frac{\pi}{3})$

Soluzione. i) La funzione è continua e derivabile su $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ e si ha

$$f'(x) = \frac{e^x(1-\sqrt{3}-x)}{e^{2x}+(\sqrt{3}+x)^2}$$

La funzione è strettamente decrescente sull'intevallo considerato e quindi invertibile.
ii) Vale $f(-\dfrac{1}{2}) = \operatorname{arctg}(\dfrac{\sqrt{e}(2\sqrt{3}-1)}{2})$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ quindi il dominio di g è l'intervallo $\Big(0, \operatorname{arctg}(\dfrac{\sqrt{e}(2\sqrt{3}-1)}{2})\Big] = f(\Big[-\dfrac{1}{2}, +\infty\Big))$.
iii) $\frac{\pi}{3} = f(0)$, dato che $f'(0) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \neq 0$ la funzione g è derivabile in $y = \frac{\pi}{3}$ e vale $g'(\frac{\pi}{3}) = -2(1+\sqrt{3})$.

Esercizio 3. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^2+2x+2}dx$.

Soluzione. Si ha $x^3+x^2+2x+1 = (x-1)(x^2+2x+2)+2x+3$ quindi

$$\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^2+2x+2}dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \log(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + c$$

Esercizio 4. Discutere la risolubilità del seguente sistema al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+2y+z+1 & = & 0 \\ ay - z & = & 0 \\ ax+2ay+a^2z+1 & = & 0 \\ -x+(a-2)y & = & b \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ a & 2a & a^2 & -1 \\ -1 & a-2 & 0 & b \end{array}\right).$$

Riducendo a scalini si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{2} \\ 0 & 0 & a(a-1) & a-1 \end{array}\right).$$

Quindi se $a = 0$ il sistema non ha soluzione per ogni valore di $b \in \mathbb{R}$.
Se $a = 1$ il sistema ha una sola soluzione per ogni valore di $b \in \mathbb{R}$.
S $a \neq 0, 1$ la matrice ridotta è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & b-\frac{a+2}{a} \end{array}\right).$$

quindi se $b = \frac{a+2}{a}$ esiste una sola soluzione, se $b \neq \frac{a+2}{a}$ il sistema non ha soluzione.

Esercizio 5. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = x^2y^2 - 4x^2$$

Trovare, se esiste, una soluzione tale che $y(3) = -2$.

Soluzione. Riscriviamo l'equazione come $y' = x^2(y^2 - 4)$. Osserviamo che le funzioni costanti $y = \pm 2$ sono soluzioni. Se $y \neq \pm 2$ e dividiamo per $y^2 - 4$ otteniamo $\frac{y'}{y^2-4} = x^2$ che è un'equazione a variabili separabili.
Se scriviamo $y' = \frac{dy}{dx}$ e separiamo le variabili, otteniamo

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4} = \int x^2 dx.$$

Poiché $\frac{1}{y^2-4} = \frac{1}{4}(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2})$, integrando si ottiene

$$\frac{1}{4} \log \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = \frac{1}{3}x^3 + c$$

da cui si ricava $y(x) = 2\,\dfrac{1 + ke^{\frac{4}{3}x^3}}{1 - ke^{\frac{4}{3}x^3}}$, $k \neq 0$.
Dato che per $k = 0$ si trova la soluzione costante $y = 2$, le soluzioni sono $y(x) = 2\,\dfrac{1 + ke^{\frac{4}{3}x^3}}{1 - ke^{\frac{4}{3}x^3}}$, $k \in \mathbb{R}$ e $y(x) = -2$.
ii) La soluzione costante $y = -2$ soddisfa la condizione ed è la soluzione cercata.