

**Istituzioni di Matematica**  
**26 Gennaio 2004**

- Esercizio 1.** Date le funzioni  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = cx^2$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,
- trovare per quali valori di  $c \in \mathbb{R}$  esiste un punto P tale che i grafici di  $f$  e  $g$  siano tangenti in P,
  - trovare le coordinate di P,
  - per quali valori di  $c \in \mathbb{R}$  l'equazione  $\log x = cx^2$  ha una sola soluzione?

**Esercizio 2.** Data la funzione  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1-x}$

- Determinare il dominio di definizione di  $f$
- Su quali intervalli la funzione e' crescente?
- Su quali intervalli e' concava?
- Trovare le coordinate di eventuali massimi, minimi e flessi.
- Se esistono asintoti, determinarli.
- Disegnare il grafico di  $f$ .

**Esercizio 3.** Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

**Esercizio 4.** Trovare le radici seste del numero complesso

$$z = \frac{i-1}{1+i} (\sqrt{3}-i) i^{101}$$

**Esercizio 5.** Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + \alpha y + (\alpha + 2)z = \beta \\ x + y + \alpha z = \beta + 1 \\ \alpha x + a y - 2z = 3 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Interpretare geometricamente i risultati al variare di  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  .