

**Istituzioni di Matematica**  
**25 Giugno 2008**

**Esercizio 1.** Data la funzione  $f(x) = \sin(\pi x)$ , dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

- a)  $f$  è periodica di periodo  $2\pi$
- b) Il grafico di  $f$  ha tre intersezioni con la retta  $y = x$ ,
- c)  $\text{Im}(f) = [-\pi, \pi]$ ,
- d) la retta  $y = x$  è tangente al grafico di  $f$  per  $x = 0$ .

**Esercizio 2.** Data la funzione  $f(x) = \arctg(x) - \log(x+1)$

- a) Determinare il dominio di definizione di  $f$ , i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.
- b) Determinare su quali intervalli la funzione è crescente e su quali decrescente.
- c) Trovare le coordinate di eventuali massimi e minimi locali e assoluti.
- d) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = 0$ .
- e) Disegnare il grafico di  $f$ .

**Esercizio 3.** Calcolare l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{1 + e^{2x}} \text{ e l'asse delle } x, \text{ per } x \in \left[ \log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \log(\sqrt{3}) \right].$$

Semplificare il risultato, ed esprimerlo solo con numeri razionali e/o radicali di numeri razionali.

**Esercizio 4.** Determinare per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  il sistema

$$\begin{cases} x + 2ky + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \\ 4x - 6y - kz = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non banali.

**Esercizio 5.** Risolvere in campo complesso l'equazione

$$z^2 + \bar{z} = |z| + i \left( \frac{1-i}{1+i} \right)^2 \text{Im } z.$$