Istituzioni di Matematica
29 Gennaio 2008
Correzione

Esercizio 1. Trovare minimi e massimi della funzione $f(x)=\text{arcsen}(\sqrt{x^2-x})$.

Soluzione. Il dominio di definizione della funzione e' $[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0]\cup[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

Poiche'

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}\sqrt{-x^2+x+1}}$$

la funzione e' derivabile in :

$$(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)\cup(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

inoltre la derivata, che e' sempre diversa da zero sul dominio di definizione, risulta minore di zero in $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)$ e maggiore di zero in $(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

Si hanno quindi due massimi in $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dove la funzione vale $\frac{\pi}{2}$ e due minimi in $x=0$ e $x=1$, dove la funzione vale 0 .

Esercizio 2. Data la funzione $f(x)=\frac{x+e}{\log(x+e)}$

a) Determinare il dominio di esistenza di f
b) Su quali intervalli la funzione e' crescente e su quali decrescente?
c) Trovare le coordinate di massimi e minimi e flessi.
d) Su quali intervalli e' concava?
e) Disegnare il grafico di *f.*
f) Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di *f* nel punto di ascissa *x*=1

Soluzione. a) la funzione e' definita per $x\in(-e,-e+1)\cup(-e+1,+\infty)$ **.**

b) $f'(x)=\frac{\log(x+e)-1}{\log^2(x+e)}$ quindi la funzione e' crescente per $x\in(0,+\infty)$ e decrescente per $x\in(-e,-e+1)\cup(-e+1,0)$.

c) Per $x=0$ si ha un minimo e la funzione vale *e.* Poiche' $\lim_{x\to-e} f(x)=0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ mentre i limiti destro e sinistro per *x* che tende a *(1-e)* sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$, il punto x=0 e' un minimo relativo. $f''(x)=\frac{2-\log(x+e)}{(x+e)\log^3(x+e)}$ Quindi si ha un flesso per $x=e^2-e$ e la funzione vale $\frac{e^2}{2}$.

d) la funzione e' concava per $x\in(-e,-e+1)\cup(e^2-e,+\infty)$

e) C'e' un asintoto verticale in $x=1-e$, poiche' $\frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{x}=0$ non c'e' asintoto obliquo.

f) l'equazione della retta tangente e' data da $y=f(1)+f'(1)(x-1)=\frac{(1+e)}{\log(1+e)}+\frac{\log(1+e)-1}{\log^2(1+e)}(x-1)$.

Esercizio 3. Calcolare il valore medio della funzione $f(x)=\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})$ sull'intervallo $[0,8]$.

Soluzione. Poiche' la funzione e' continua il valore medio puo' essere calcolato come : $v_m(f)=\frac{1}{8}\int_0^8 \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})$ Con la sostituzione $t=\sqrt[3]{x}$ si ottiene

$$v_m(f)=\frac{1}{8}\int_0^8 \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})\,dx=\frac{1}{8}\int_0^2 3t^2\operatorname{arctg}(t)\,dt=\frac{1}{8}([t^3\operatorname{arctg} t]_0^2-\int_0^2\frac{t^3}{1+t^2}dt)\,\cdot$$

$$\frac{1}{8}([t^3\operatorname{arctg} t-\frac{t^2}{2}]_0^2+\int_0^2\frac{t}{1+t^2}dt)=\frac{8\operatorname{arctg}(2)-2+\log(\sqrt{5})}{8}$$

Esercizio 4. Determinare l'equazione della retta r passante per il punto P=(0,0,3), che incontra la retta $s:\begin{cases} x-y=0 \\ z-1=0\end{cases}$ ed e' parallela al piano $\pi: x+y+z=0$.

Soluzione. Una retta passante per P e' della forma X= P+tB. La retta r deve incontrare la retta s quindi esiste un punto Q=(a,a,1) di s che appartiene anche a r. Allora il vettore B=P-Q=(-a,-a,2). Poiche' la retta r deve essere parallela al piano π, si deve avere B(1,1,1)=-2a+2=0, da cui si ottiene a=1. La retta r ha dunque equazione parametrica X=(0,0,3)+(-1,-1,2)t.

Esercizio 5. Risolvere a scelta uno dei seguenti esercizi:

a) Risolvere in campo complesso l'equazione

$$(z^2-2(\bar{z}+1)-i(\Re z+1))|z^4+i|=0 \quad .$$

Soluzione. Posto $z=a+ib$ le soluzioni sono date dalle soluzioni delle due equazioni $(z^2-2(\bar{z}+1)-i(\Re z+1))=0$ e $z^4+i=0$. Per la prima equazione consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} a^2-b^2-2a-2=0 \\ 2ab+2b-a-1=(2b-1)(a+1)=0 \end{cases}$$

$$z_1=-1+i\,,\, z_2=-1-i\,,\, z_3=\frac{2+\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}i\,,\, z_4=\frac{2-\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}i$$

da cui si ottiene .

Le soluzioni della seconda equazione sono le radici quarte di $-i$, ossia:

$$z=(\cos(\frac{3}{8}\pi+\frac{k\pi}{2})+i\,\mathrm{sen}(\frac{3}{8}\pi+\frac{k\pi}{2}))\,,\, k=0,1,2,3 \quad .$$

b) Trovare il rettangolo di area massima, (con un lato sull'asse delle ascisse) che puo' essere inscritto in un semicerchio di raggio *r*.

Soluzione. Il rettangolo cercato sara' simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Siano $P_1=(x,0)$ e $P_2=(x,\sqrt{r^2-x^2}),\, 0<x<r$ due dei vertici del rettangolo cercato. Allora l'area e' data da $A(x)=2x\sqrt{r^2-x^2}$. Vogliamo trovare il massimo di questa funzione. Poiche' $A'(x)=\frac{2(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}$ si ottiene che l'area massima si ha per

$x=\frac{r}{\sqrt{2}}$ e vale $A=2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}=r^2$