Istituzioni di Matematica
19 Marzo 2008
Correzione

Esercizio 1. Provare che la funzione $f(x)=arctan(\sqrt{2^x-1})$ e' invertibile sul suo dominio di definizione. Calcolare $D(f^{-1})(\pi/4)$.

<u>**Soluzione.**</u> La funzione e' definita per $x\geq 0$ e' continua e derivabile sul suo dominio e la derivata che vale $f'(x)=\dfrac{\log(2)}{2\sqrt{2^x-1}}$ e' sempre strettamente positiva quindi la funzione e' invertibile sul suo dominio di definizione.
Poiche' $f(1)=\pi/4$ si ha che :

$$D(f^{-1})(\pi/4)=\frac{1}{D(f)(1)}=\frac{2}{\log(2)} \quad .$$

Esercizio 2. Determinare massimi e minimi della funzione $f(x)=e^{\cos x}+3\cos(x)$

<u>**Soluzione.**</u> La funzione e' definita per $\forall x\in\mathbb{R}$ ed e' continua e derivabile sul suo dominio e la derivata vale $f'(x)=-\mathrm{sen}(x)(e^{\cos x}+3)$. Quindi $f'(x)=0$ per $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Poiche' $f''(x)=(\mathrm{sen}^2(x)-\cos x)e^{\cos x}-3\cos x$ si ha

$f''(2k\pi)<0$ e $f''((2k+1)\pi)>0$ .Quindi si ottengono punti di massimo per $x=2k\pi$ e di minimo per $x=(2k+1)\pi$.

Esercizio 3. Calcolare le primitive della funzione $f(x)=e^{2x}\log(1+e^x)$.

<u>**Soluzione.**</u> Con la sostituzione $e^x=t$ si ottiene $\int f(x)\,dx=[\int t\log(1+t)\,dt]_{x=e^x}$
Integrando per parti si ottiene $\int t\log(1+t)\,dt=\dfrac{t^2}{2}\log(1+t)-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{t^2}{1+t}dt$.
si ha $t^2=(t-1)(t+1)+1$ cosi'

$$\int\frac{t^2}{1+t}dt=\int(t-1)\,dt+\int\frac{1}{t+1}dt=\frac{(t-1)^2}{2}+\log|t+1|+k$$, da cui

$$\int f(x)\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\log(e^x+1)-\frac{(e^x-1)^2}{4}-\frac{\log(1+e^x)}{2}+k$$

Esercizio 4. Discutere la risolubilita' del seguente sistema

$$\begin{cases} x-2y-2z=2 \\ 2x-ky-kz=3 \\ 3x-ky-3z=k \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

<u>**Soluzione.**</u> Riducendo a scalini si trova che il sistema ha una sola soluzione per $k \neq 3$ e $k \neq 4$. Per $k=4$ il sistema non ha soluzioni, per $k=3$ esiste una infinita' di soluzioni.

Esercizio 5. Risolvere in campo complesso l'equazione $i z^6 - 2 z^3 + 2 i = 0$.

<u>**Soluzione.**</u> Ponendo $t=z^3$ e risolvendo l'equazione di secondo grado che si ottiene si trovano due equazioni $z^3=(\sqrt{3}-1)i$ e $z^3=-(1+\sqrt{3})i$.
Le soluzioni sono quindi:

$$z=\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\left(\cos\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)+i\, sen\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)\right) \text{per } k=0,1,2$$

$$z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\left(\cos\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)+i\, sen\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)\right) \text{per } k=1,2,3$$