Istituzioni di Matematica
26 Maggio 2008
Correzione

Esercizio1. Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ **,** se:

i) $f(1)=5$

ii) $f'(x)\leq 3 \quad \forall x \;\; 1\leq x\leq 4,$

quale e' il valore massimo possibile per $f(x), 1<x\leq 4$?

__**Soluzione.**__ Poiche' la funzione e' continua e derivabile su $\mathbb{R}$, si puo' applicare il Teorema di Langrange all'intervallo [1,*x*], $1<x\leq 4$.
Si ottiene quindi $f(x)-f(1)=f'(x_0)(x-1),$ con $x_0\in(1,x)$ da cui segue:

$$f(x)=f(1)+f'(x_0)(x-1)\leq 5+3(x-1)\leq 14$$

Esercizio 2. Studiare la funzione $f(x)=\log(\frac{x}{x-2})+5x$ e disegnarne il grafico.

__**Soluzione.**__ La funzione e' definita per $\frac{x}{x-2}>0,$ e $x-2\neq 0$, quindi per $x<0,$ e $x>2$ ed e' continua sul suo dominio.

Si ha che $f'(x)=\frac{5x^2-10x-2}{x(x-2)}$. Poiche' il denominatore e' sempre positivo nel dominio di definizione, il segno e' dato dal segno del numeratore e la funzione e' derivabile sul suo dominio di definizione.

La derivata si annulla per $x=\frac{5-\sqrt{35}}{5}$ e per $x=\frac{5+\sqrt{35}}{5}$, e' positiva (e quindi *f* e' crescente) per $x<\frac{5-\sqrt{35}}{5}$ e per $x>\frac{5+\sqrt{35}}{5}$ e negativa (e quindi *f* e' decrescente) per $\frac{5-\sqrt{35}}{5}<x<0$ e per $2<x<\frac{5+\sqrt{35}}{5}$.

La funzione f ha un massimo per $x_M=\frac{5-\sqrt{35}}{5}$ e vale $f(x_M)=-3.4$ La funzione f ha un minimo per $x_m=\frac{5+\sqrt{35}}{5}$ e vale $f(x_m)=13.4$.

Si tratta di un minimo e massimo locale, e poiche' si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty, \lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$ non ci sono massimi o minimi assoluti. La derivata seconda vale $f''(x)=\frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2}$ quindi non si annulla mai sul dominio di definizione. E' positiva (e quindi la funzione

e' convessa) per $x>2$, negativa (e quindi la funzione e' concava) per $x<0$.
Infine poiche' $\lim_{x\to\infty} f(x)=5$, $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-5x)=0$ si ha che la retta $y=5x$ e' un asintoto obliquo.

Esercizio 3. Calcolare $\int_0^3 \frac{\sqrt{x+4}+3}{(\sqrt{x+4}-1)(x-5)}dx$.

<u>Soluzione.</u> Applicando la sostituzione $\sqrt{x+4}=t$ si ottiene:

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+4}+3}{(\sqrt{x+4}-1)(x-5)}dx = \int_2^{\sqrt{7}} \frac{2t(t+3)}{(t-1)(t^2-9)dt} = \int_2^{\sqrt{7}} \frac{2t}{(t-1)(t-3)dt}$$

$$= 2[(-1/2\log|t-1|+3/2\log|t-3|)]_2^{\sqrt{7}}=\log(\frac{28\sqrt{7}-74}{3}) .$$

Esercizio 4. Dato il sistema

$$\begin{cases} x+3y-bz=5 \\ x-y-3z=b \\ by-z=1 \end{cases}$$

determinare per quali valori di $b\in\mathbb{R}$ esistono soluzioni e in tal caso calcolarle.

<u>Soluzione.</u> Riducendo a scalini si ottiene che per $b=-1$ non si hanno soluzioni, per $b=4$ si ha una infinita' di soluzioni $s=(\frac{17+13t}{4},\frac{t+1}{4},t), t\in\mathbb{R}$ e per $b\neq-1\, e\, b\neq 4$ esiste una sola soluzione $s=(\frac{b^2+4b-1}{b+1},\frac{2}{b+1},\frac{b-1}{b+1})$.

Esercizio 5. Risolvere a scelta uno dei seguenti esercizi:

i) Disegnare la regione del piano delimitata dalla curva di equazione $y^2-x^3=0$ e dalla retta $x=2$ e determinare il volume del solido ottenuto ruotando questa regione attorno all'asse $x=0$.
ii) Risolvere in campo complesso l'equazione

$$(|z|^2+2z^2+4\bar{z}+1)(z^5+8)=0$$

<u>Soluzione i)</u>. Il volume cercato e' dato da:

$$V=2[\int_0^{2\sqrt{2}} 4\pi\, dy-\int_0^{2\sqrt{2}} \pi\, y^{4/3}\, dy]=\frac{64\sqrt{2}}{7}\pi \quad .$$

<u>Soluzione ii)</u>. Ponendo $z=a+ib$, dall'equazione $(|z|^2+2z^2+4\bar{z}+1)=0$ si ottiene il sistema $\begin{cases} 3a^2-b^2+4a+1=0 \\ b(a-1)=0 \end{cases}$ che ha soluzioni

$z_1=-1, z_2=-1/3, z_3=1+i2\sqrt{2}, z_4=1-i2\sqrt{2}$.

Dall'equazione $z^5=r^5(\cos(5t)+i\ \mathrm{sen}(5t))=8(\cos(\pi)+i\,\mathrm{sen}(\pi))$ si ottiengono le soluzioni: $w_k=2^{3/5}(\cos(\frac{(2k+1)\pi}{5})+i\,\mathrm{sen}(\frac{(2k+1)\pi}{5}))$ per $0\le k\le 4$.