Istituzioni di Matematica -CIA
4 Febbraio 2009
CORREZIONE

Esercizio 1. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione $f(x)=x^{3/2}+\sqrt{x}$ nel suo insieme di definizione.

Svolgimento: La funzione e' definita per $x\geq 0$ .Poiche' $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ la funzione e' derivabile per $x>0$. Quindi la funzione e' strettamente crescente sul suo dominio di definizione. Poiche' $f(0)=0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ si ottiene che la funzione ha un minimo assoluto in $x=0$ e non ha massimi (relativi o assoluti).

Esercizio 2. Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e' invertibile.

Svolgimento: La matrice e' invertibile se e solo se $det(A)=5a-5\neq 0$, quindi per $a\neq 1$.

Esercizio 3. Calcolare l'integrale $\int \frac{7x-5}{x^2+x-6}dx$.

Solgimento: Decomponendo in somma si ottiene
$$\int \frac{7x-5}{x^2+x-6}dx=\frac{26}{5}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{9}{5}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{26}{5}\log|x+3|+\frac{9}{5}\log|x-2|+c \quad .$$

Esercizio 4. Trovare l'area della regione compresa tra i grafici delle funzioni $f(x)=x^3$ e $g(x)=3x^2-2x$ nell'intervallo [0,2]. (Si consiglia di disegnare le funzioni).

Svolgimento: I grafici si intersecano quando $x^3=3x^2-2x$ ossia per $x=0,\ x=1$ e $x=2$. Nell'intervalle [0,1] $f(x)\geq g(x)$ mentre in [1,2]

$f(x) \leq g(x)$, quindi l'area cercata e' data da:

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx + \int_1^2 (g(x)-f(x))\,dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \quad .$$

Esercizio 5. Svolgere a scelta uno dei seguenti esercizi:

a) Risolvere in campo complesso l'equazione $z^2+3z+2\bar{z}+3=0$. Se $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e' una soluzione calcolare $|2w+3|$.

Svolgimento. Posto $z=a+ib$ l'equazione diviene

$(a^2-b^2+5a+3)+ib(2a+1)=0$, da cui $b=0$ oppure $a=\frac{-1}{2}$.

Sostituendo nella relazione per la parte reale si ricavano le soluzioni:

$z_1=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$, $z_2=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$, $z_3=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Scelto $w=z_3$ si ha che $|2w+3|=|2+\sqrt{3}i|=\sqrt{7}$

b) Sia $f(x)=x^7-x^5-x^4+2x+1$. Provare che esiste $x_0 \in (-1,1)$ tale che la retta tangente al grafico di *f* in $(x_0, f(x_0))$ e' parallela alla retta $y=2x$.

Svolgimento. La funzione e' continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo [-1,1] si ottiene che esiste $x_0 \in (-1,1)$ tale che $\frac{f(1)-f(-1)}{2}=2=f'(x_0)$, da cui la tesi.