Istituzioni di Matematica
25 Giugno 2008
CORREZIONE

Esercizio 1. Data la funzione $f(x)=\mathrm{sen}(\pi x)$, dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a) f e' periodica di periodo 2π

b) Il grafico di f ha tre intersezioni con la retta $y=x$,

c) $\mathrm{Im}(f)=[-\pi,\pi]$,

d) la retta $y=x$ e' tangente al grafico di f per $x=0$.

Soluzione. a) e' falsa. Il periodo di *f* e' $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$.

c) e' falsa. Infatti $\mathrm{Im}(f)=[-1,1]$.

d) e' falsa. La retta tangente in 0 ha equazione $y=f(0)+f'(0)x=\pi x$. Questa retta ha coefficiente angolare maggiore di 1 quindi *b)* e' vera.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x)=\mathrm{arctg}(x)-\log(x+1)$

a) Determinare il dominio di definizione di *f,* i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

b) Determinare su quali intervalli la funzione e' crescente e su quali decrescente.

c) Trovare le coordinate di eventuali massimi e minimi locali e assoluti.

d) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione *f*(*x*) =0.

e) Disegnare il grafico di *f.*

Soluzione. a) Il dominio di *f* e' $(-1,+\infty)$. I limiti agli estremi del dominio valgono $\lim_{x\to -1} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ quindi la retta $x=-1$ e' un asintoto verticale. Poiche' $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ non ci sono asintoti orizzontali o obliqui.

b) $f'(x)=\frac{x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}$ la funzione e' crescente per $x\in(0,1)$ e decrescente per $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$. Quindi $x_m=0$ e' un punto di minimo relativo con valore $f(x_m)=0$ e $x_M=1$ e' un punto di massimo relativo con valore $f(x_M)=\frac{\pi}{4}-\log(2)\approx 0.1$.

c) Le soluzioni dell'equazione *f*(*x*) =0 sono due: $x_m=0$ e un punto $x_0>1$, come risulta dal teorema degli zeri applicato all'intervallo $[1,h]$ con $h\in\mathbb{R}$

sufficientemente grande e tale che $f(h)<0$, (poiche' $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ tale punto esiste certamente).

Esercizio 3. Calcolare l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^x}{1+e^{2x}}$ e l'asse delle ***x***, per $x\in[\log(\frac{1}{\sqrt{3}}),\log(\sqrt{3})]$.

Semplificare il risultato, ed esprimerlo solo con numeri razionali e/o radicali di numeri razionali.

<u>**Soluzione.**</u> Studiamo prima il segno della funzone. Il denominatore e' sempre positivo, quindi basta studiare il segno del denominatore. Si ha $f(x)>0$ se e solo se $x>0$. Poiche' $\log(\frac{1}{\sqrt{3}})=-\log(\sqrt{3})<0$ si ha che l'area cercata e' data da:

$A=A_1+A_2$, dove $A_1=-\int_{-\log(\sqrt{3})}^{0} f(x)\,dx$ e $A_2=\int_0^{\log(\sqrt{3})} f(x)\,dx$ -

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx-\int\frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx=\frac{1}{2}\log(1+e^{2x})-\arctan(e^x)+c$$

Da cui:

$$A_1=-(\frac{1}{2}\log(2)-\operatorname{arctg}(1)-\frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{3})+\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}))=\frac{1}{2}\log(\frac{2}{3})+\frac{\pi}{12}$$

$$A_2=\frac{1}{2}\log(4)-\operatorname{arctg}(\sqrt{3})-\log(2)+\operatorname{arctg}(1)=\frac{1}{2}\log(\frac{2}{3})-\frac{\pi}{12}$$

quindi $A=A_1+A_2=\log(\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

Esercizio 4. Determinare per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x+2ky+z=0 \\ 3x+2z=0 \\ 4x-6y-kz=0 \end{cases}$$

ha soluzioni non banali.

Soluzione. Il sistema ha soluzioni non banali se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti e' 0, ossia se e solo se $2(3k^2+8k-3)=2(k+3)(k-\frac{1}{3})=0$.

Quindi i valori cercati sono $k=-3$ e $k=\frac{1}{3}$.

Esercizio 5. Risolvere in campo complesso l'equazione

$$z^2+\bar{z}=|z|+i\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 \operatorname{Im} z \quad .$$

Soluzione. Si ha $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=-1$ quindi ponendo $z=a+ib$ si ottiene: $a^2-b^2+2abi+a-ib=\sqrt{a^2+b^2}-ib$. Uguagliando a zero la parte reale e la parte immaginaria si ottengono i due sistemi:

$$\begin{cases} a=0 \\ -b^2-|b|=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} b=0 \\ a^2+a-|a|=0 \end{cases}$$

che hanno soluzioni $z=0$ e $z=-2$.